



TRAITÉ
DE
MÉCHANIQUE.

TRAITÉ
DE
MÉCHANIQUE.

Par M. l'Abbé MARIE *de la Maison & Société de Sorbonne, Censeur Royal, Professeur de Mathématiques au College Mazarin.*



A PARIS,

Chez la Veuve Desaint, Libraire, rue du Foin Saint-Jacques.

M. DCC. LXXIV.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

AVERTISSEMENT.

CET Ouvrage est divisé en deux Parties, la *Statique* & la *Dynamique*. La premiere a pour objet l'Equilibre, la seconde traite du Mouvement.

MAIS comme elle supposent toutes deux les Principes généraux de la *Méchanique*, & certaines Théories préliminaires qui leur sont communes, j'ai rassemblé dans une courte Introduction ces Principes & ces Théories.

OUTRE les Définitions ordinaires, cette Introduction contient la Théorie du mouvement uniforme, celle du Mouvement composé, celle des Résultantes, & le Principe général de l'Equilibre.

LA Statique est partagée en deux Sections; l'une est pour les Centres de Gravité, l'autre pour les Machines.

ON trouvera dans la premiere les propriétés & les loix de la Pesanteur, deux Méthodes de déterminer le Centre de Gravité dans tous les cas,

& des Applications en assez grand nombre, pour rendre cette théorie familiere.

Mais pour la rendre complette, il falloit avoir égard à deux Eléments que l'on néglige presque toujours, & en apprécier l'influence. C'est par-là que finit la premiere Section de la Statique.

La seconde expose d'abord les conditions propres à chaque Machine simple, pour que l'Equilibre ait lieu. Elle descend ensuite dans le détail de plusieurs Machines composées, dont elle enseigne à calculer les effets, & à connoître les proportions les plus avantageuses.

Quelques Réflexions générales sur les Machines & sur le Frottement terminent la Statique.

Il y a trois Sections dans la Dynamique. La premiere traite du mouvement d'un corps considéré comme un point libre, qui obéit avec une égale facilité aux diverses impulsions des Forces accélératrices.

On suppose de même dans la seconde Section que le Mobile n'est qu'un point, mais qu'il est assujetti à se mouvoir sur une ligne donnée, quelles que soient les Puissances qui le sollicitent au mouvement.

La troisieme a pour but de faire connoître le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres, en les considérant comme autant de points différents, ce qui facilite la même recherche pour le cas où on les supposeroit d'un volume fini.

Les principaux objets de la Dynamique sont discutés avec plus ou moins d'étendue dans ces trois Sections. Elles renferment les Formules du mouvement varié, les Forces Centrales, les Trajectoires des Projectiles, de nouvelles Applications au jet des Bombes & au mouvement des Planetes, la gravitation réciproque des Corps célestes, le Problême des trois Corps, la résistance des Milieux, la Théorie des Pendules, la Courbe de la plus vîte descente, les Loix du Choc des Corps, le Principe de la Conservation des Forces Vives, le Moment d'Inertie, l'usage des trois Axes Principaux, & la maniere de déterminer le Centre d'Oscillation.

Les Regles du Calcul Différentiel & du Calcul Intégral trouvent souvent leur application dans ce Traité, soit parce qu'elles rendent les démonstrations plus courtes, soit parce qu'il en résulte plus

d'uniformité dans la marche de l'Ouvrage, ſoit enfin parce qu'il n'eſt guere poſſible de réſoudre autrement beaucoup de Problêmes de Méchanique.

Ceux dont la ſolution entraîne plus de difficulté, & ceux qui paroiſſent moins utiles ſe reconnoîtront aiſément aux parentheſes qui les renferment, & aux étoiles marginales qui les indiquent. On peut les paſſer preſque tous, ſans nuire à la liaiſon des matieres dont ils ſont partie.

J'ai cité dans le cours de cet Ouvrage la plûpart des Géometres illuſtres dont les travaux ont reculé les bornes de la Méchanique, afin d'indiquer les ſources mêmes où l'on pourra puiſer des connoiſſances plus approfondies.



TRAITÉ



TRAITÉ
DE
MÉCHANIQUE.

INTRODUCTION.

1. LA Méchanique, en général, a pour objet le mouvement des corps, & l'équilibre des forces oppofées.

Mais lorfqu'elle difcute en particulier, les principes, les loix & les effets du mouvement, elle prend le nom de *Dynamique*. Si ces difcuffions font relatives au mouvement des *Fluides*, elles forment alors une feconde branche, appellée *Hydro-Dynamique*.

Quant à l'équilibre des forces oppofées, la Méchanique fe divife encore en *Statique* & en *Hydro-Statique*, fuivant qu'elle s'occupe des recherches néceffaires pour déterminer les conditions de l'équilibre, entre les corps *Solides*, ou entre les Fluides.

Comme la Statique & la Dynamique fervent de fondement

aux deux autres branches de la Méchanique, c'eſt par elles que l'on doit commencer l'étude de cette Science. Elles ſont la matiere de ce Traité.

I.

2. On dit qu'un corps eſt en mouvement, toutes les fois qu'il change de place. Or pour conſommer ce changement, il faut que le Mobile quitte le lieu où il eſt, & qu'après avoir parcouru les lieux intermédiaires, il aboutiſſe enfin au lieu qu'il doit occuper.

Ce paſſage ſucceſſif d'un lieu dans un autre, s'opere tantôt plus vîte, tantôt plus lentement. Telle on voit, dans une Montre, l'aiguille des Minutes faire le tour du Cadran, en douze fois moins de temps que l'aiguille des Heures. Tel encore l'éclair qui annonce la Foudre, traverſe l'Atmoſphere avec bien plus de rapidité, que le bruit du Tonnerre.

3. L'idée du mouvement renferme donc trois principaux objets, qui ſont en quelque ſorte les Eléments de la Méchanique. 1°, *L'eſpace parcouru par le mobile ;* 2°, *le temps employé à le parcourir ;* 3°, *le rapport de cet eſpace au temps qu'il qu'il a fallu pour le parcourir.*

C'eſt ce rapport que tout le monde connoît ſous le nom de *Vîteſſe.* Il eſt à propos de s'en former ici une juſte idée.

II.

4. Quelle que ſoit la nature de l'eſpace, ſur laquelle on a tant de fois raiſonné à perte de vue, on peut ſe le repréſenter comme une étendue immenſe & pénétrable, dans laquelle tous les corps ſont plongés.

Ils en occupent tous une portion plus ou moins grande, ſuivant qu'ils ſont plus ou moins gros. Leur groſſeur ou leur volume eſt donc la meſure de cette portion d'eſpace qu'ils rempliſſent, & qu'on appelle le *Lieu* de ces corps.

Cela poſé, concevons dans cette immenſité, deux points éloignés l'un de l'autre d'une quantité finie, d'une toiſe, par exemple. Si un corps mis en mouvement par une cauſe quelconque, parcourt cette diſtance, ce ne peut être que dans un certain temps.

Or quelle que ſoit encore la nature du temps, il eſt prouvé par expérience, que le même mobile animé d'un plus fort mouvement, parcourt plus vîte cette même diſtance; enſorte que pour un mouvement double, par exemple, il lui faut deux fois moins de temps.

5. Mais comme dans cet eſpace indéfini que nous nous figurons confuſément, on peut prendre des diſtances déterminées que l'on appellera des *Pouces*, des *Pieds*, des *Toiſes*, &c; & que ces diſtances ſeront des meſures fixes, c'eſt-à-dire, des *unités de longueur*, auxquelles on rapportera toutes les dimenſions de cette eſpece: ainſi dans le profond abîme du temps, on peut détacher, pour ainſi dire, des meſures fixes & connues qui ſerviront à leur tour, comme autant d'*unités de temps*, pour comparer toutes les durées paſſageres. On les appellera des *Heures*, des *Minutes*, des *Secondes*, &c.

Enſorte donc, que ſi nous appellons une minute le temps que ce mobile met à parcourir une toiſe, en vertu du premier mouvement; nous dirons qu'en vertu du ſecond, il l'a

parcourue dans une demi-minute, & que par l'impreſſion d'un mouvement ſoixante fois plus rapide que le premier, il parcourroit cet intervalle dans une ſeconde.

6. Il eſt aiſé de voir maintenant, que ſi une partie, une meſure, une unité d'eſpace exige, pour être parcourue, une, ou deux, ou trois unités de temps, le nombre n de ces portions d'eſpace ne ſera parcouru que dans un nombre n, ou $2n$, ou $3n$ d'unités de temps, en ſuppoſant que le mobile conſerve le même mouvement, dans toute la longueur de l'eſpace qu'il parcourt.

Il y a donc toujours un certain rapport entre le nombre des unités d'eſpace & celui des unités de temps; rapport bien facile à déterminer par la ſimple diviſion de ces deux nombres. Le Quotient exprime dans tous les cas la vîteſſe du mobile.

7. Et delà, ce principe ſi connu en Méchanique, (quoique aſſez mal énoncé), que *la vîteſſe eſt égale à l'eſpace diviſé par le temps.*

III.

Mais reprenons les choſes de plus haut, & après nous être placés au point de vue ſous lequel les premiers Méchaniciens dûrent enviſager le ſujet que nous traitons, eſſayons de marcher ſur leurs traces, & d'analyſer leurs premiers efforts.

8. La matiere & le mouvement s'offrirent par-tout à leurs regards, comme ils s'offrent encore, à chaque inſtant, aux nôtres. Sans doute que familiariſés, ainſi que nous, dès

l'enfance, avec toutes les merveilles qui résultent du mouvement, ils furent bien plus empressés d'en jouir, que d'en rechercher les causes. Quelle dût être cependant la surprise de ceux qui les premiers s'occuperent de ces recherches ! Est-il rien en effet de plus étonnant, dans la Nature, que la simple communication du mouvement, pour quiconque en médite les merveilles !

Mon bras est en repos; mon ame ordonne qu'il se meuve; & il se meut aussi-tôt! Sous ma main se présente un corps quelconque, qui semble par son repos devoir languir dans une inaction éternelle; & tout-à-coup ce même corps poussé, tiré ou jetté se met en mouvement ! Trouve-t-il sur sa route d'autres corps en repos ? il partage ses forces avec eux suivant les loix les plus constantes, quoique ces loix semblent se diversifier à l'infini.

Tantôt il s'arrête brusquement, ses forces paroissent tout-à-coup anéanties; tantôt il revient sur ses pas, ou s'il continue sa premiere route, c'est avec une vîtesse sensiblement affoiblie, qui ne peut pas tarder de finir. Elle finit aussi, & voilà que le corps rentre dans l'état de repos, d'où je l'avois tiré. Quel est donc le ressort secret qui a pu le mettre en mouvement ? Quelle est l'intelligence qui préside à une distribution si exacte de ses forces ? Qu'est donc devenu son mouvement ? Qu'est devenu celui des corps qu'il avoit poussés, ou entraînés, ou du moins ébranlés sur son passage ? voilà déja bien des questions, & on pourroit en ajouter bien d'autres. Faut-il donc s'étonner si les plus célébres Phi-

losophes de l'Antiquité, d'accord en ce point avec les plus sages Philosophes Modernes, ont regardé l'existence & la communication du mouvement, comme une preuve sans réplique de l'existence de Dieu ?

IV.

9. A ces premieres observations se joignirent bientôt celles de la *Pesanteur* & du *Frottement* : on a toujours vu les corps assujettis à cette loi impérieuse qui les ramene constamment vers la Terre. Quel en est le principe ? on n'en sait rien : mais les effets n'en sont pas moins palpables, ni moins universels dans tous les corps qui nous entourent.

Le plus ordinaire de ces effets, est de détruire peu-à-peu les mouvements qui sont opposés à la direction de la pesanteur. Vous jettez une pierre en l'air, & cette pierre retombe. Il n'y a rien là qui ne soit très-commun. On crieroit même au prodige, si elle ne retomboit pas..... Eh, pourquoi cependant faut-il qu'elle retombe ? Pourquoi ne continue-t-elle pas de s'éloigner de la Terre, en suivant sa direction primitive, avec toute la vîtesse que vous lui avez imprimée ?.... Pourquoi, direz-vous ? c'est qu'une *Puissance* supérieure la repousse... Mais qu'est-ce donc que cette puissance ?... personne ne peut la définir, quoique tout le monde en éprouve les effets. On est convenu de l'appeller *Pesanteur*, *Gravité*, *Gravitation*, &c, tous mots synonimes pour exprimer cette tendance générale qu'ont tous les corps vers le centre de la Terre.

10. Cette propriété n'est pourtant pas essentielle à la

matiere. On peut l'en dépouiller par la pensée, sans altérer en rien sa nature; & dans cet état, elle n'offre plus qu'un assemblage de parties plus ou moins rapprochées, selon qu'il y a plus ou moins d'interstices dans les corps qui résultent de cet assemblage. On est encore convenu de désigner la quantité de ces parties par le mot *Masse*. Ainsi lorsqu'un corps a deux fois plus de parties matérielles qu'un autre, on dit qu'il a deux fois plus de masse.

V.

11. A ne consulter que ce que nous voyons, que ce que nous connoissons des propriétés de la matiere, il est constant qu'elle est absolument indifférente pour toute sorte de directions dans son mouvement. La Bombe qui s'élance du Mortier, le Boulet qui sort du Canon, tous les corps projettés suivant des directions quelconques, ne s'écarteroient jamais de la ligne de leur mouvement primitif, si des causes étrangeres ne leur opposoient pas des obstacles invincibles. Ils conserveroient éternellement leur premiere vîtesse, si la gravité, l'air, l'eau, ou tout autre *Milieu* à diviser, si les frottements multipliés qu'il faut vaincre, ne la détruisoient pas à l'envi.

Comme tous ces obstacles sont sujets à des variations infinies, il eût été impossible de rien fixer dans la science du mouvement, si on n'eût pas commencé par faire abstraction de ces obstacles. On la fit donc, cette abstraction; & après avoir cherché quelles seroient les loix du mouvement, s'il n'y avoit rien dans la Nature, qui pût en troubler l'harmonie,

on tranſporta ces mêmes loix dans l'état naturel des choſes; afin de pouvoir apprécier les effets produits par tous ces divers obſtacles. Ainſi furent poſés les fondements de la Méchanique.

VI.

12. En ſuivant le même procédé, nous ſuppoſerons donc 1°, que les corps n'ont point de peſanteur; 2°, que dans leur mouvement ils n'éprouvent aucune réſiſtance, ni de la part du milieu qu'ils traverſent, ni de la part du frottement des plans ſur leſquels ils ſe meuvent.

Ces ſuppoſitions faites, nous déterminerons les loix de leur mouvement; & après en avoir calculé les effets, nous les comparerons avec les réſultats que donne l'expérience. Tel eſt en général le plan que nous ſuivrons dans le cours de cet Ouvrage. Mais avant de commencer, il eſt à propos d'ajouter ici quelques autres notions préliminaires.

VII.

13. On appelle *Mouvement uniforme*, celui d'un corps qui en temps égaux parcourt des eſpaces égaux. S'il y a dans la Nature des exemples de ce mouvement, ils ſont bien rares, à cauſe de tous les obſtacles qui s'oppoſent à ſon uniformité. La meilleure Pendule n'offre que de grandes approximations de cette égalité rigoureuſe & abſolue, ſoit dans la marche réguliere des roues & des aiguilles, ſoit dans les *oſcillations* de la lentille.

On n'en conçoit pas moins la poſſibilité du mouvement uniforme; & la définition que l'on en donne, ne ſuppoſe que cette poſſibilité.

14. On appelle *Mouvement accéléré*, celui qui dans des temps égaux fait parcourir au mobile des espaces qui vont toujours en augmentant. Rien n'est plus commun que ces sortes de mouvements dans l'état présent des choses. Voyez avec quelle rapidité tombe vers la fin de sa chûte, un corps qui descend d'une hauteur considérable.

15. Si les espaces parcourus en temps égaux diminuent de plus en plus, alors le mouvement s'appelle *retardé*. Parmi des milliers d'exemples que nous en avons sous les yeux, il suffit de rappeller celui d'un corps jetté en l'air, ou celui d'une boule qui roule. On voit leur mouvement s'affoiblir d'abord d'une maniere sensible, & bientôt après on voit ce corps descendre, & cette boule s'arrêter.

16. Tout ce qui donne, tout ce qui imprime le mouvement à un corps, se nomme en général *Puissance*, *Force*, *Cause motrice*, *Agent* : mais si cette force agit sans interruption sur le mobile, elle se nomme en particulier *Force accélératrice*. La gravité est dans ce cas, par rapport à tous les corps en mouvement, considérés dans l'état naturel.

VIII.

17. COMME le mouvement est un passage continuel d'un lieu dans un autre, le repos est une persévérance continuelle dans le même lieu. On en distingue de deux sortes, le *Repos absolu*, & le *Repos relatif*.

Le premier est celui d'un corps qui non-seulement n'a pas le plus petit mouvement *propre* qui le fasse changer de lieu, mais qui ne participe pas même au moindre mouvement

commun des corps dont il eſt environné. Exiſte-t-il dans le monde un ſemblable repos ? c'eſt ce que l'on ignore, & la queſtion eſt très-peu importante. Depuis l'homme qui repoſe du ſommeil le plus tranquille, juſqu'à ces maſſes énormes de rochers & de montagnes dont le repos paroît ſi aſſuré, tout tourne, tout avance avec l'étonnante vîteſſe qui emporte la terre à travers de l'eſpace.

Quant au repos relatif, on ne peut en nier l'exiſtence ; c'eſt celui d'un corps qui reſte dans le même lieu, en ce ſens qu'il ne change point de diſtance par rapport aux objets dont il eſt entouré *immédiatement.* C'eſt ainſi, par exemple, qu'un homme aſſis dans le fond de ſa voiture, eſt en repos, quelque vîte qu'aille la voiture.

Ces notions poſées, voici les fondements de la Méchanique.

Principes généraux de la Méchanique.

PRINCIPE I.

18. *Tout corps qui eſt en repos, y demeureroit éternellement, s'il n'en étoit tiré par quelque cauſe étrangere.*

Ce principe eſt inconteſtable : car de deux choſes l'une ; ou il faut une cauſe étrangere pour imprimer du mouvement à ce corps, ou il peut s'arracher de lui-même au repos, en ſe donnant du mouvement. Mais dans quel ſens, dans quelle direction pourroit-il ſe mouvoir, puiſqu'il n'y a pas de raiſon pour qu'il ſe meuve d'un côté plutôt que d'un autre ?

C'eſt ſur ce principe que Deſcartes & Newton fonderent leurs théories des forces Méchaniques. On ſait que le premier ; après avoir ſuppoſé l'eſpace rempli de matiere, ne demandoit plus que du mouvement, pour expliquer le Méchaniſme de l'Univers. Il avoit bien compris que cette matiere, abandonnée à elle-même, reſteroit à jamais dans l'inertie & dans le repos. Il eut donc recours à l'Etre ſuprême, pour donner ſeulement le premier branle à cet amas informe ; & ſe chargeant, pour ainſi dire, des ſuites & des détails, il éleva ce vaſte édifice, dont les ruines étonnent encore par la magnificence & la hardieſſe qu'elles décelent dans ſon plan.

Averti cependant par la fragilité de cet édifice, de la néceſſité de prendre une autre route, Newton fit tous ſes efforts pour trouver la véritable. Il remonta, comme Deſcartes, à l'origine des choſes ; & là, ne voyant, comme lui, dans la matiere, qu'un être purement paſſif, ſans mouvement, ſans action & ſans force, il jugea que par ſa nature elle eût été condamnée à un éternel repos, ſi le Créateur ne l'en eût tirée. Il ſuppoſa donc que tous les corps du ſyſtême ſolaire avoient été projettés dans l'eſpace, chacun ſuivant une ligne droite différente, mais tous avec une gravitation univerſelle vers un centre déterminé ; & de cette ſuppoſition, il s'éleva par des calculs nouveaux à ces découvertes immortelles qui ſemblent avoir revêtu ſon hypotheſe, de toutes les couleurs de la vérité.

Principe II.

19. *Tout corps mis une fois en mouvement, continueroit à perpétuité de se mouvoir uniformément & en ligne droite, si son mouvement n'étoit point troublé par l'action de quelque puissance étrangere.*

Ce principe n'est pas moins incontestable que le précédent : car puisqu'un corps en repos ne peut se donner du mouvement, il n'est pas en son pouvoir de détruire ni même d'altérer celui qu'il a reçu. Il doit donc, 1°, le conserver toujours.

2°, Il faut que ce mouvement soit uniforme : car si en temps égaux, le mobile ne parcouroit pas des espaces égaux, il altéreroit son propre mouvement ; ce qui est de toute impossibilité.

3°, Puisqu'à l'origine de son mouvement, sa direction est déterminée par la cause motrice, il n'y a plus de raison pour qu'il s'en écarte d'un côté plutôt que d'un autre. Il persévérera donc toujours dans un même degré de vîtesse, & dans la même direction.

Et tel seroit, encore une fois, le mouvement de tous les corps, si la pesanteur, si le frottement, si la résistance de l'air, jointe à celle de tant d'autres parties de matiere ou agitées ou en repos, qui se rencontrent sur leur passage, n'anéantissoient pas, à la fin, les plus grandes comme les plus petites vîtesses, & ne changeoient pas presque toutes les directions.

Principe III.

20. *Cette espece de résistance que tous les corps opposent à leur changement d'état, soit pour le repos, soit pour le mouve-*

ment (on l'appelle avec Newton la force d'inertie) *eſt toujours proportionnelle à leur maſſe.*

En effet, cette réſiſtance eſt le réſultat de toutes celles qu'oppoſent leurs diverſes parties, puiſque chacune réſiſte au changement de ſon état. Donc plus il y a de parties dans un corps, plus ſa force d'inertie eſt grande.

21. Il faut cependant ne pas confondre cette force avec celle de la peſanteur; 1°, parce qu'elle auroit lieu, même dans la ſuppoſition que les corps ne fuſſent point peſants; 2°, parce qu'elle réſiſte dans tous les ſens, & que la gravité ne s'oppoſe qu'aux mouvements qui lui ſont oppoſés; 3°, parce que l'action inſtantanée de la gravité n'eſt ſuſceptible d'aucune comparaiſon avec les puiſſances finies; au lieu que la force d'inertie, ou la réſiſtance qu'oppoſent les corps à leur changement d'état, eſt toujours proportionnelle à la force motrice.

PRINCIPE IV.

22. *La quantité de mouvement dans un mobile quelconque qui ſe meut uniformément, eſt égale au produit de ſa maſſe par ſa vîteſſe.*

La maſſe d'un corps n'eſt autre choſe que la ſomme des parties matérielles qui le compoſent; & ſon mouvement total réſulte de tous les mouvements particuliers de ces parties. Or elles ont toutes la même vîteſſe, (celle du mobile), & on conçoit que chacune a une unité de mouvement; donc en multipliant leur ſomme par la vîteſſe qui leur eſt commune, on doit trouver le mouvement total.

23. Si le mobile n'éprouvoit qu'un mouvement de rotation, tout le monde fait qu'alors ses parties auroient des vîtesses différentes : mais il ne s'agit ici que du mouvement rectiligne qu'une puissance quelconque peut lui imprimer.

24. Donc appellant M la masse du mobile, V sa vîtesse, on aura généralement MV pour l'expression de son mouvement.

Cette maniere d'évaluer les forces d'un mobile, a essuyé beaucoup de contradictions, depuis que Leibnitz a introduit dans la Méchanique, cette distinction célebre des *Forces vives* & des *Forces mortes*, sur lesquelles on s'est débattu si long temps. Suivi de plusieurs illustres Géometres, Leibnitz prétendoit que, pour estimer les forces d'un corps en mouvement, il falloit multiplier sa masse par le quarré de sa vîtesse. Il nommoit ce produit la force vive du mobile. Par les forces mortes il entendoit le simple effort, la seule pression d'un corps ou d'une puissance contre un obstacle insurmontable, & il avouoit que celles-ci devoient se mesurer, en multipliant la masse par la vîtesse, qui dans ce cas n'étoit que *virtuelle*.

Peu contents de cette nouveauté, & naturellement en garde contre les subtilités Métaphysiques de ce grand homme, les autres Géometres persisterent dans leur ancienne opinion. Plusieurs même la défendirent avec succès, & la dispute devint fort vive. Mais après avoir bien disputé, chacun resta dans son sentiment, comme cela se pratique d'ordinaire, & les choses n'en allerent pas plus mal, ni

pour les uns, ni pour les autres; preuve certaine que les fondements de la Méchanique n'étoient pas intéreſſés à leur querelle.

Cette ſeule conſidération doit empêcher de prendre part à cette eſpece de ſchiſme. Le ſujet n'en vaut plus guere la peine, depuis que par des eſſais réitérés des deux méthodes, on s'eſt aſſuré qu'elles donnoient abſolument les mêmes réſultats, pour la ſolution des mêmes problêmes.

Nous dirons donc, que la quantité de mouvement eſt égale au produit de la maſſe par la vîteſſe; & puiſque l'effet d'une puiſſance quelconque conſiſte à imprimer à un corps une certaine quantité de mouvement, nous ajouterons que la meſure la plus naturelle & la plus uniforme de l'action de cette puiſſance ſur une maſſe quelconque, eſt le produit de cette maſſe par la vîteſſe imprimée.

25. Il nous arrivera ſouvent d'appeller puiſſance ou force, ce qui n'en eſt réellement que l'effet; parce qu'en Méchanique, les puiſſances n'intéreſſent que par les effets qu'elles produiſent. Souvent même on ignore leur nature, quoique leurs effets ſoient très-connus. Ainſi les loix & les effets de la peſanteur, quoique bien conſtatés depuis plus d'un ſiecle, n'ont répandu preſque aucune lumiere ſur la cauſe phyſique de ce phénomene.

Il ſuffira donc d'avoir une fois fixé le ſens des mots, *Force*, *Puiſſance*, ſi ſouvent répétés dans les ouvrages de Méchanique, pour n'être jamais embarraſſé ſur leur ſignification & leur uſage.

26. Obſervons, en finiſſant cet article, qu'une même force appliquée à différents corps, doit leur imprimer des vîteſſes différentes pour que ſon effet ſoit le même. Car ſoit V la vîteſſe qu'elle peut communiquer à une maſſe donnée M, & v celle qui doit être communiquée à une autre maſſe m, pour que les deux quantités de mouvement ſoient égales. On aura donc $mv = MV$; d'où l'on tirera $v = \frac{MV}{m}$ pour l'expreſſion de la vîteſſe du ſecond mobile m.

Formules du Mouvement uniforme.

27. Puisque dans le mouvement uniforme, les eſpaces parcourus en temps égaux ſont égaux, il eſt évident que les eſpaces doivent toujours être proportionnels aux temps employés à les parcourir; & réciproquement, lorſque les eſpaces ſont proportionnels aux temps, le mouvement eſt uniforme. Appellant donc V la vîteſſe d'un mobile, ou ce qui eſt ici la même choſe, appellant V l'eſpace qu'il parcourt dans une unité de temps, dans une ſeconde, par exemple; & nommant E l'eſpace proportionnel qu'il parcourroit dans un nombre T de ſecondes, on aura $V : E :: I : T$; & par conſéquent $E = VT$; Formule générale des mouvements uniformes; de laquelle on déduit $V = \frac{E}{T}$, & $T = \frac{E}{V}$: enſorte qu'étant données deux de ces quantités E, V, T, la troiſieme ſe détermine immédiatement.

28. De ce que $V = \frac{E}{T}$, il ſuit que toute autre vîteſſe uniforme $v = \frac{e}{t}$; donc $V : v :: \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$; ce qui donne $Eut = eVT$: d'où l'on déduit,

1°,

1°, Que les vîtesses de deux mobiles animés d'un mouvement uniforme, sont en raison directe des espaces & en raison inverse des temps : car on a $V:v::Et:eT$.

2°, Que leurs vîtesses en temps égaux sont proportionnelles aux espaces; puisqu'en effaçant $T=t$ dans l'équation précédente, on a $Ev=eV$; ou $V:v::E:e$.

3°, Que si les espaces parcourus par ces deux mobiles sont égaux, leurs vîtesses sont réciproquement comme les temps.

4°, Si les espaces sont proportionnels aux temps, les vîtesses sont égales : car alors on a $E:e::T:t$, donc $Et=eT$; donc $V=v$.

5°, Mais si les espaces sont en raison inverse des temps; les vîtesses alors seront en raison inverse des quarrés des temps : car puisque d'un côté on a $E:e::t:T$, & que de l'autre $E=VT$, & $e=vt$, on aura en substituant, $VT:vt::t:T$, & $VT^2=vt^2$, d'où l'on tire $V:v::t^2:T^2$.

6°, Dans la même supposition, on aura $V:v::E^2:e^2$.

29. L'équation $Evt=eVT$, fait voir de même que lorsque deux mobiles se meuvent uniformément, les espaces qu'ils parcourent sont en raison composée des temps & des vîtesses : donc si leurs vîtesses sont égales, les espaces seront comme les temps, & réciproquement en temps égaux, les espaces seront proportionnels aux vîtesses : donc aussi les espaces seront égaux, toutes les fois que les vîtesses seront réciproquement proportionnelles aux temps, &c, &c.

L'équation $Evt=eVT$ s'applique avec la même facilité à la comparaison des temps. C

REMARQUE I.

30. Il sembleroit d'abord que l'espace, le temps & la vîtesse étant des quantités réellement hétérogenes, on ne devroit jamais les comparer ensemble. Cependant de la maniere dont nous les avons envisagées dans l'article précédent, rien ne s'oppose à ces sortes de comparaisons. En effet, nous avons considéré la vîtesse V, comme exprimant l'espace qu'un mobile parcourt dans le temps 1, c'est-à-dire, dans une certaine partie déterminée de temps que l'on a prise pour l'unité : donc V est comparable à E. Quant à la quantité T, elle n'est dans cette supposition, qu'un nombre abstrait, que l'on peut par conséquent comparer avec toute autre quantité.

REMARQUE II.

31. Quelque grande que soit l'obscurité des discussions Métaphysiques sur la nature du temps, il est certain que nous le concevons tous, comme s'écoulant uniformément. On doit donc chercher la mesure de sa durée dans le mouvement uniforme. Mais comme d'un côté, nous ne pouvons être assurés de l'uniformité d'un mouvement, que par l'égalité des temps employés à parcourir des espaces égaux, & que d'un autre côté, nous ne pouvons juger de l'égalité de deux temps, sans en avoir une mesure fixe, il est clair que nous roulons ici dans un cercle vicieux, & qu'à la rigueur nous n'avons pas de moyen exact de mesurer le temps. Il faut donc se contenter d'une simple approximation.

32. C'est ainsi que le mouvement d'une Pendule faite

avec beaucoup de ſoin, eſt cenſé uniforme, & qu'il l'eſt réellement, ſans erreur ſenſible : c'eſt encore ainſi que le mouvement de rotation que la terre éprouve tous les jours autour de ſon axe, & qui nous fait croire que les Cieux tournent en ſens contraire, eſt jugé uniforme.

[Cependant lorſqu'on le rapporte au Soleil, comme on le fait dans l'uſage civil, pour meſurer la longueur des jours par les révolutions diurnes de cet aſtre, on y trouve quelques irrégularités, qui rendent les jours tantôt un peu plus longs, tantôt un peu plus courts. Mais pour ſuppléer au petit inconvénient de ces inégalités, on regle les Pendules Aſtronomiques, non ſur le *mouvement vrai* du Soleil, tels que les Cadrans & les Méridiens le donnent, ce qui eût été preſque impoſſible ; mais ſur ſon *mouvement moyen*, ou ſur la révolution apparente des *Fixes*. Avec cette précaution, une pendule bien réglée ne s'écarte jamais au-delà de certaines limites, connues pour tous les jours, de l'heure que les meilleurs cadrans ſolaires indiquent, & qu'on appelle le *Temps vrai ;* l'heure de la pendule eſt le *Temps moyen ;* leur différence journaliere ſe nomme *Equation ;* & pour le dire, en paſſant, une pendule eſt à équation, lorſqu'elle a deux aiguilles de minutes, dont l'une marque le temps vrai, & l'autre le temps moyen.] ⋆

33. En attendant que nous puiſſions développer la théorie des pendules, il ſuffira d'obſerver que les progrès ſinguliers des Artiſtes modernes ont porté les mouvements d'Horlogerie à une ſi grande préciſion, qu'on ne doit plus avoir de

difficulté pour la mesure du temps. Observons aussi qu'il est d'usage en Méchanique de le compter par secondes, ensorte que nous regarderons désormais une seconde, comme l'unité de temps.

Problêmes sur le Mouvement uniforme.

Fig. I. 34. Problême I. Deux corps A & B se mouvant uniformément sur une ligne droite AB, avec des vîtesses données V & v, sont actuellement à une distance $AB = d$; trouver dans quel temps leur intervalle sera $= c$?

Soit x le temps cherché. Alors si les deux mobiles vont dans le même sens, B se trouvera en B' & A en A', lorsque le temps x sera écoulé, ensorte que leur distance $A'B'$ sera égale à c.

Cela posé, on a (7) $AA' = Vx$, & $BB' = vx$; donc $d + vx - Vx = \pm c$: je mets $\pm c$, quoiqu'il n'y ait que le signe $+$ qui convienne à la figure, parce qu'il peut arriver que le point A' soit plus éloigné que le point B'. On aura donc $x = \frac{d \mp c}{V - v}$.

Ainsi ce petit problême est susceptible de deux solutions, comme il est aisé de le voir, en faisant attention que de part & d'autre du point de rencontre, les deux mobiles peuvent se trouver à la même distance c. Or pour déterminer le temps au bout duquel ils doivent se rencontrer, s'il y a lieu, on fera $c = 0$, & on aura $x = \frac{d}{V - v}$; valeur moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux qui résultent du cas général.

Mais pour que cette formule ait lieu, il faut ſuppoſer que les mobiles ſont des points, ſans quoi il y auroit colliſion entr'eux, lorſque c ſeroit égal à la ſomme de leurs rayons, ſi ces deux corps étoient ſphériques.

EXEMPLE.

On ſuppoſe que A parcourt 4 pieds dans une ſeconde, que B n'en parcourt que $2\frac{3}{4}$ dans le même temps, que l'intervalle qui les ſépare eſt de 20 pieds, & on demande quand ils ne feront plus qu'à 6 pieds de diſtance, l'un de l'autre ?

On aura $x = \frac{20 \mp 6}{4 - \frac{11}{4}} = \frac{80 \mp 24}{5}$; c'eſt-à-dire, que les deux mobiles ſe trouveront à la diſtance demandée ſoit au bout de $11''\frac{1}{5}$, ſoit après $20''\frac{4}{5}$. Le milieu donne $16''$ pour le moment de leur rencontre; bien entendu que pour que la ſeconde ſolution ait lieu, il faut ſuppoſer que ces corps étant impénétrables, ils ne ſe meuvent pas préciſément dans la même ligne, ni dans le même plan, mais ſeulement dans des lignes paralleles aſſez éloignées pour qu'ils ne puiſſent pas ſe choquer en ſe rencontrant. C'eſt ainſi que l'aiguille des minutes rencontre celle des heures, & que la Lune rencontre le Soleil, lorſqu'elle l'éclipſe pour nous.

35. PROBLÊME II. Deux corps A & B, animés de différentes vîteſſes uniformes, tournent autour d'une même circonférence & dans le même ſens. Leur diſtance eſt d, quand ſera-t-elle c ? FIG. 2.

Soit V la vîteſſe du corps A que je ſuppoſe en avoir le plus; ſoit v la vîteſſe du corps B; ſoit x le temps cherché. Si les deux mobiles vont dans le ſens AB, on trouvera;

comme dans le premier problême, $x = \frac{d \mp c}{V - v}$; mais s'ils tournent dans le sens *BA*, alors $x = \frac{c - d}{V - v}$.

S'ils tournoient en sens contraires, on feroit v négative, & le dénominateur $V - v$ deviendroit $V + v$.

EXEMPLE.

La vîtesse du corps *A* est telle, qu'il parcourt $\frac{1}{6}$ de la circonférence en une seconde; le corps *B* n'en parcourt que $\frac{1}{8}$ dans le même temps. Leur premier intervalle est $\frac{1}{5}$ de cette même circonférence, & ils se meuvent tous deux dans le sens *AB* : quand est-ce qu'ils ne seront plus éloignés que de $\frac{1}{20}$ de tour ?

On a donc $V = \frac{1}{6}$, $v = \frac{1}{8}$, $V - v = \frac{1}{24}$, $d = \frac{1}{5}$, $c = \frac{1}{20}$; ce qui donne $x = 24\left(\frac{1}{5} \mp \frac{1}{20}\right)$. Les deux valeurs sont $3'' \frac{3}{5}$ & $6''$. Leur moyen proportionnel arithmétique est $4'' \frac{4}{5}$, pour l'instant ou les deux mobiles se rencontrent.

Si avec les mêmes vîtesses, ils tournoient dans le sens *BA*, on auroit alors $x = 24\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{5}\right) = -3'' \frac{3}{5}$, valeur négative qui indique que le temps demandé est déja passé.

En supposant les vîtesses dans le rapport de $1 : \frac{1}{12}$, ou de $1 : \frac{1}{60}$, on résoudroit par le premier cas toutes les questions de ce genre, pour la rencontre de l'aiguille des heures avec celle des minutes, & pour la rencontre de celle-ci avec celle des secondes.

Lorsqu'il ne s'agit que de déterminer le temps de cette rencontre pour deux mobiles quelconques qui tournent ainsi dans un cercle, pour deux voyageurs, par exemple, qui feroient le tour d'une isle, l'Arithmétique seule résout facilement ces sortes de problêmes.

Une isle a 39 lieues de tour. Deux voyageurs partent ensemble du même point ; le premier fait réguliérement 14 lieues par jour, le second en fait 11 : quand se rençontreront-ils ?

Puisque le premier gagne 3 lieues chaque jour sur le second, il le ratrappera au treizieme jour : car $3^l : 39^l :: 1^j : x^j = 13$; & ainsi de même pour les autres suppositions que l'on pourroit faire.

REMARQUE.

36. TOUTES les fois que deux corps se meuvent dans une même circonférence, qui peut par conséquent être représentée par l'unité, ils se trouvent réellement à la même distance c, lorsque l'intervalle qui les sépare est c, $1+c$, $2+c$, $3+c$, ... ou généralement $E+c$, en désignant par E un nombre entier quelconque. On peut donc généraliser les formules précédentes, en y substituant $E+c$ au lieu de c; & on aura pour le premier cas, $x = \frac{d+E\mp c}{V-v}$, pour le second, $x = \frac{E\pm c-d}{V-v}$, ce qui mene à une infinité de solutions.

Ensorte que si dans la formule $x = \frac{c-d}{V-v}$, on eût fait successivement $c = \frac{1}{20}$, $c = 1+\frac{1}{20}$, $c = 2+\frac{1}{20}$, &c, on eût trouvé les valeurs positives, $x = 20''\frac{2}{3}$, $x = 24''+20''\frac{2}{3}$, & ainsi de suite, en augmentant toujours de $24''$.

[37. PROBLÊME. III. Les mêmes corps A & B étant situés à la distance d sur la circonférence AB, on demande dans combien de temps ils se rencontreront pour la premiere, ou en général pour la m^{ieme} fois ? *

La réponſe n'eſt pas difficile : car alors leur diſtance ſera $m - 1$;& par conſéquent ſi A dont la vîteſſe eſt plus grande, ſe trouve précéder B, par rapport au mouvement, on aura $x = \frac{m-d}{V-v}$. S'il le ſuit au contraire, on aura $x = \frac{m-1+d}{V-v}$.

EXEMPLE.

Soit $V = \frac{1}{6}$, $v = \frac{1}{8}$, $d = \frac{1}{5}$; le premier cas donnera $x = 24m - \frac{24}{5}$, & le ſecond, $x = 24(m-1) + \frac{24}{5}$; il faudra donc $19'' \frac{1}{5}$, pour que la premiere rencontre ait lieu dans le premier cas, & $4'' \frac{4}{5}$, pour qu'elle ait lieu dans le ſecond.

38. PROBLÊME IV. Trois corps A, B, C partent d'un même point pour faire le tour d'une même circonférence ; avec des vîteſſes reſpectives que l'on déſigne par v, v' & v''. Quand ſe rencontreront-ils tous enſemble ?

J'appelle x le temps cherché ; vx, $v'x$, $v''x$ ſeront les eſpaces parcourus au moment [illegible] leur rencontre : or le plus grand de ces eſpaces doit ſurpaſſer chacun des deux autres d'un certain nombre entier de tours ; donc $v'x - vx = E$; & $v''x - v'x = E'$; où nous remarquerons que la rencontre générale des trois corps ſera la E^{ieme} de A avec B, la E'^{ieme} de B avec C, & la $(E + E')^{ieme}$ de A avec C.

Ces équations donneront $x = \frac{E}{v'-v} = \frac{E'}{v''-v'}$, & $\frac{v'-v}{v''-v'} = \frac{E}{E'}$: donc ſi la fraction $\frac{v'-v}{v''-v'}$, réduite à l'expreſſion la plus ſimple devient $\frac{p}{q}$, on aura pour la premiere rencontre $E = p$, $E' = q$: pour la ſeconde, on aura de même $E = 2p$, $E' = 2q$; &c; donc $x = \frac{p}{v'-v}$ donnera l'inſtant de la premiere rencontre générale, &c.

EXEMPLE.

Exemple.

Suppoſons $v = \frac{1}{16}$, $v' = \frac{1}{4}$, $v'' = \frac{41}{80}$; on aura $\frac{v'-v}{v''-v'} = \frac{5}{7}$, $p = 5$, & $x = 26'' \frac{2}{3}$. Les trois corps ſe trouveront donc réunis au bout de $26''\frac{2}{3}$, & ce ſera pour la premiere fois. Mais cette premiere rencontre générale ſera la cinquieme rencontre particuliere de A avec B, la ſeptieme de B avec C, & la douzieme de A avec C.

Si quelques-uns de ces corps alloient en ſens contraire, il faudroit rendre négatives leurs vîteſſes, dans les équations qui précédent.

39. Voici comment on peut procéder par la ſimple Arithmétique, à la ſolution de ces ſortes de problêmes. C ne parcourt que $\frac{1}{16}$ de la circonférence, pendant que A en parcourt $\frac{41}{80}$; celui-ci gagne donc $\frac{9}{20}$ d'avance ſur l'autre, à chaque ſeconde; & par conſéquent ils ſe rencontreront toutes les $2''\frac{2}{9}$.

Pareillement C ne parcourant que $\frac{1}{16}$, pendant que B parcourt $\frac{1}{4}$, B gagnera $\frac{3}{16}$ par ſeconde; il rencontrera donc C toutes les $5''\frac{1}{3}$. A & B ſe rencontreront auſſi toutes les $3''\frac{17}{21}$. Or pour que ces trois périodes coincident enſemble, c'eſt-à-dire, pour que les trois corps ſe trouvent réunis, nous n'avons plus qu'à chercher trois nombres entiers qui ſoient entre eux comme $2''\frac{2}{9} : 3''\frac{17}{21} : 5''\frac{1}{3}$. Les plus petits de ces nombres ſont 5, 7 & 12; donc la premiere rencontre générale aura lieu après 5 rencontres particulieres de A avec B, ou ce qui revient au même, après 7 rencontres de B avec C, & après 12 entre A & C, comme nous l'avions déja trouvé.

Quant au moment de leur rencontre générale, il se détermine en multipliant $5''\frac{1}{3}$ par 5, ou $3''\frac{17}{21}$ par 7, ou $2''\frac{2}{9}$ par 12.

40. Problême V. Quatre mobiles A, B, C, D partent ensemble avec des vîtesses respectives v, v', v'', v''', d'un même point, pour faire le tour d'une circonférence, & ils se meuvent tous dans le même sens. On demande dans combien de temps ils se retrouveront tous ensemble.

Soit x le temps cherché ; on aura pour les espaces parcourus vx, $v'x$, $v''x$, $v'''x$: ensuite viendront les équations $v'x - vx = E$, $(v'' - v')x = E'$, $(v''' - v'')x = E''$; d'où l'on tirera $x = \frac{E}{v'-v} = \frac{E'}{v''-v'} = \frac{E''}{v'''-v''}$; puis $\frac{v'-v}{v''-v'} = \frac{E}{E'}$, $\frac{v'-v}{v'''-v''} = \frac{E}{E''}$.

Supposons maintenant qu'après avoir réduit à l'expression la plus simple, on ait $\frac{v'-v}{v''-v'} = \frac{p}{q}$, & $\frac{v'-v}{v'''-v''} = \frac{p'}{q'}$; alors $E = ep$, & $E = e'p'$, (e & e' sont aussi des nombres entiers) : donc $ep = e'p'$, $\frac{e}{e'} = \frac{p'}{p}$; & par conséquent, si on réduit la fraction $\frac{p'}{p}$ à l'expression la plus simple $\frac{e}{e'}$, on aura d'abord la valeur de e, puis celle de E, & enfin celle de $x = \frac{ep}{v'-v}$.

Exemple.

Soit $v = 1$, $v' = 1{,}11$, $v'' = 1{,}242$, $v''' = 1{,}2805$. On aura $\frac{v'-v}{v''-v'} = \frac{0{,}11}{0{,}132} = \frac{5}{6}$, & $\frac{v'-v}{v'''-v''} = \frac{0{,}11}{0{,}0385} = \frac{20}{7}$: donc $p = 5$, $p' = 20$, $\frac{p'}{p} = 4$, $e = 4$, & enfin $x = \frac{4 \cdot 5}{0{,}11} = \frac{2000}{11}$ $= 181''\frac{9}{11}$. Il faudra donc $181''\frac{9}{11}$ pour que ces quatre mobiles se retrouvent ensemble.

La méthode est la même pour un plus grand nombre de corps, & pour le cas où ils ne partiroient pas tous du même point.]

Théorie des Mouvements uniformes composés.

41. IMAGINONS que le corps A soit placé sur un plan Fig. 3. ACa qui se meut uniformément dans la direction Aa, avec une vîtesse telle qu'à chaque unité de temps, il parcoure un espace égal à la ligne Aa. Il est certain que ce corps considéré relativement au plan ACa, n'a aucun mouvement; mais que si un spectateur immobile, placé hors de ce plan, observe ce même corps, il lui attribuera un mouvement égal & parallele à celui du plan.

Cela posé, si on conçoit qu'une puissance quelconque P agisse sur lui selon la direction PAC, & lui imprime une vîtesse telle que dans une unité de temps, il puisse parcourir l'espace AC, on ne peut douter qu'en vertu de cette premiere impulsion qui lui est propre, il ne doive se trouver au point C, lorsque cette unité de temps finira. Mais comme, en vertu du mouvement du plan, la ligne AC s'avance d'un mouvement parallele & uniforme vers ac, & qu'elle doit réellement se confondre avec ac au bout d'une unité de temps, il est clair que le point C se confondra avec le point c, & que par conséquent le corps A qui participe au mouvement du plan, doit se trouver en c à la fin de la premiere unité de temps.

On prouve de même qu'au bout d'une partie quelconque T de cette unité, le corps A animé de la même vîtesse AC, doit parcourir un espace proportionnel $AB = T \times AC$, pendant que le mouvement commun entraîne la ligne AB

parallellement à elle-même, à une diſtance $A\,a' = B\,b = T \times A\,a$. Cette ligne ſe confond donc avec $a'b$; & par conſéquent b eſt le lieu du corps, au bout du temps T. Or il eſt aiſé de voir que tous les points b que l'on détermineroit par le même raiſonnement, ſe trouvent ſur la même diagonale $A\,c$, puiſque $A\,B : B\,b :: A\,C : C\,c$; donc le corps A décrira réellement la diagonale $A\,c$.

Mais ce n'eſt pas là tout. Son mouvement le long de cette ligne doit être uniforme; car $A\,b : A\,c :: A\,B : A\,C :: T \times A\,C : A\,C :: T : 1$; c'eſt-à-dire, $A\,b : A\,c$, comme le temps employé à parcourir $A\,b$ eſt au temps employé à parcourir $A\,c$. Donc enfin le mouvement du corps A ſuivant la diagonale $A\,c$ eſt toujours uniforme (27).

42. Puiſqu'un corps en repos ſur un plan mobile a toute la vîteſſe de ce plan, il eſt clair que ſi un corps mû uniformément ſuivant une ligne droite $Q\,A\,a$ avec la vîteſſe $A\,a$, reçoit au point A, de la puiſſance P, une vîteſſe $A\,C$ dans la direction $P\,A\,C$, il décrira uniformément la diagonale $A\,c$ d'un parallélogramme formé ſur les côtés $A\,a$, $A\,C$, qui repréſenteront les vîteſſes du mobile ſuivant $A\,a$ & $A\,C$, pendant que la diagonale $A\,c$ repréſentera ſa nouvelle vîteſſe.

43. Mais à quelque cauſe que ſoit dûe ſa vîteſſe dans la direction $A\,a$, on peut ſe la repréſenter comme l'effet d'une puiſſance Q, qui agit au même inſtant que la puiſſance P; dont l'effet eſt dirigé ſelon $A\,C$; & comme ces deux puiſſances, ou ces deux forces ſont proportionnelles aux vîteſſes

qu'elles feroient naître féparément dans le mobile, fi elles n'agiffoient pas en commun, on peut les fubftituer à ces vîteffes mêmes, & les repréfenter comme celles-ci par les deux côtés d'un parallélogramme que nous appellerons déformais *le Parallélogramme des Forces.*

Ces chofes une fois bien comprifes, on n'aura pas de peine à retenir le principe fuivant, dont l'ufage eft fi étendu en Méchanique.

Principe du Mouvement compofé.

44. *Toutes les fois que deux puiffances agiffent en même temps fur le même mobile, fuivant des directions différentes, ce corps décrit la diagonale d'un parallélogramme formé fur leurs directions, & dont les côtés font entr'eux dans le même rapport que ces puiffances.*

Conféquences qui en réfultent.

45. Deux puiffances P & Q repréfentées par AB & AC, produifent donc le même effet qu'une feule puiffance R repréfentée par AD, diagonale du parallélogramme $ABCD$. Nous pouvons donc appeller P & Q les *Puiffances compofantes*, & donner à R le nom de *Puiffance réfultante.* Cela pofé, on aura toujours en pareil cas, cette fuite de rapports bien connus des Méchaniciens. Fig. 4.

$$P : Q : R :: AB : AC : AD.$$

46. Dans le triangle CAD, on a d'ailleurs $AC : CD : AD :: \sin ADC : \sin DAC : \sin ACD :: \sin DAB : \sin DAC : \sin CAB$; donc $P : Q : R :: \sin DAB : \sin DAC :$

ſin C A B ; conſéquence fort utile qui nous apprend que *l'une quelconque des deux puiſſances compoſantes & de leur réſultante eſt toujours comme le ſinus de l'angle compris entre les directions des deux autres.*

47. Il ſuit delà que ſi les angles *DAB*, *DAC* ſont infiniment petits, leurs ſinus reſpectifs ſe confondront avec les arcs qui leur ſervent de meſure. On aura donc *ſin* (*DAB* + *DAC*) ou *ſin CAB* = *ſin DAB* + *ſin DAC*; & par conſéquent $R = P + Q$; donc *lorſque deux puiſſances agiſſent dans le même ſens, la réſultante ſuit la même direction qu'elles, & ſe trouve égale à leur ſomme.*

Si elles agiſſoient en ſens contraire, la réſultante ſeroit égale à leur différence.

Applications de ce Principe.

48. Non-seulement on peut déterminer, par le principe du mouvement compoſé, la réſultante de deux puiſſances qui agiſſent enſemble ſur le même point d'un corps : mais encore il eſt très-aiſé de la déterminer, quelque ſoit le nombre de ces puiſſances. Pour cet effet, on en choiſira d'abord deux dont on cherchera la réſultante par le principe général. Puis on comparera cette premiere réſultante avec une autre puiſſance compoſante, & de cette comparaiſon il viendra une ſeconde réſultante qui à elle ſeule tiendra lieu des trois puiſſances déja comparées. Donc en la comparant avec une quatrieme, & ainſi de ſuite, on ne peut pas manquer de trouver la réſultante générale.

49. Par une décompoſition toute oppoſée, on retrouveroit aiſément les puiſſances ſimples qui ont contribué à former cette derniere réſultante ; & il nous arrivera ſouvent de lui en ſubſtituer deux qui ſeront repréſentées par les deux côtés d'un parallélogramme dont elle repréſentera la diagonale : car cette compoſition & cette décompoſition des forces ſont en quelque ſorte les deux principales reſſources de la Statique.

50. Si les puiſſances qui agiſſent ſur le même corps, ne ſont pas appliquées au même point, voici comment on peut déterminer leur réſultante.

Vous remarquerez d'abord que ſi l'effet d'une puiſſance quelconque P eſt de donner à toutes les parties d'un corps M une égale vîteſſe qui le faſſe mouvoir dans une direction parallele à celle de la puiſſance, comme nous le ſuppoſons ici, il importe peu à quel point de la direction PK cette puiſſance exerce ſon action, ſoit au moyen d'un levier, ſoit avec une corde, ou tel autre inſtrument que l'on voudra. La ſeule condition néceſſaire pour qu'elle produiſe conſtamment le même effet, conſiſte à lui ſuppoſer toujours la même force, dans quelque point de la droite PK qu'elle l'exerce. Fig. 5.

Cela poſé, repréſentez-vous trois puiſſances P, Q, S qui agiſſent enſemble ſur le corps M dans les directions Pp, Qq, Ss ſituées dans le même plan. En prolongeant Pp & Qq juſqu'au point de concours H, vous concevez que les puiſſances P & Q peuvent être cenſées agir en H, & que Fig. 6.

leur résultante feroit HK diagonale du parallélogramme formé fur les côtés HP, HQ confidérés comme les vîteffes que chacune de ces forces communiqueroit féparément au mobile.

En prolongeant de même la direction de la réfultante HK jufqu'à la rencontre I de la puiffance S, vous pourrez regarder cette réfultante comme agiffant en I, & comme repréfentée par une ligne IL qui foit égale à HK. Cependant la puiffance S agit de fon côté avec une force que vous fuppoferez $= IS'$: refte donc à completter le parallélogramme $S'ILG$, pour avoir la réfultante cherchée IG. Le mobile prendra donc une vîteffe égale & parallele à IG, comme s'il n'eût éprouvé que l'action d'une feule puiffance exprimée par cette derniere réfultante.

51. Par ce moyen, on peut trouver la réfultante de tant de forces qu'on voudra, & réciproquement décompofer une force en plufieurs autres qui aient certaines conditions, fans quoi ce dernier problême feroit indéterminé.

Mais quoique la méthode précédente n'exige qu'une conftruction géométrique bien fimple, elle n'eft cependant pas propre à être mife en calcul. En voici donc une autre qui remplira mieux notre objet.

Des Moments & de leurs Ufages.

52. On eft convenu d'appeller *Moment* d'une puiffance, le produit de cette puiffance par la diftance de fa direction à un point fixe pris à volonté. Comme ces fortes de produits font

ſont du plus grand uſage dans toutes les parties de la Méchanique, il a paru plus ſimple de les déſigner par le ſeul mot de *Moments*, que de répéter à chaque fois leur définition.

53. Dans le plan du parallélogramme $ABDC$ ſoit pris un point fixe M, duquel on abaiſſe ſur la diagonale AD & ſur chacun de ſes côtés AB, AC prolongés, s'il eſt néceſſaire, des perpendiculaires reſpectives MP, MP', MP''. Soit $a =$ l'angle BAD, $b =$ l'angle DAC, $AP = x$, $MP = y$, $MP' = y'$, & $MP'' = y''$. Fig. 7 & 8.

On aura d'abord l'angle $MAP' = MAP - a$; donc $\sin MAP'$ ou $\frac{y'}{AM} = \sin MAP \cos a - \sin a \cos MAP = \frac{y}{AM}\cos a - \frac{x}{AM}\sin a$; donc $y' = y \cos a - x \sin a$. Fig. 7

On aura enſuite l'angle $MAP'' = b + MAP$, d'où on déduit pareillement $y'' = y \cos b + x \sin b$. Eliminant x de ces deux équations, on en conclut $y'' \sin a + y' \sin b = y(\sin a \cos b + \sin b \cos a) = y \sin(a+b)$. Or $\sin a : \sin b : \sin(a+b) :: AC : AB : AD$; donc $AD \times MP = AB \times MP' + AC \times MP''$.

Si le point M eſt compris entre les côtés de l'angle BAD, il eſt clair que MP' devient négative : ainſi le dernier réſultat peut être appliqué aux deux cas, en écrivant $AD \times MP = AC \times MP'' \pm AB \times MP'$. Fig. 8.

54. Il ſuit delà que deux puiſſances P & Q & leur réſultante R pouvant toujours être repréſentées par les côtés & la diagonale du parallélogramme $ABCD$, ſi d'un point quelconque M pris dans le plan de ce parallélogramme, on mene des perpendiculaires ſur les directions de ces trois Fig. 9.

forces, le produit de la résultante par la perpendiculaire *MP* (qui mesure la distance de sa direction au point *M*) est égal à la somme ou à la différence des produits respectifs des deux puissances par les perpendiculaires *MP′*, *MP″* menées du point *M* sur leurs directions.

On prend la somme de ces deux produits, toutes les fois que le point *M* est hors de l'angle *B A D*. S'il est au-dedans, on prend leur différence. Or ces produits sont les moments respectifs des deux puissances composantes, & l'autre produit est le moment de leur résultante. Nous voilà donc en état de conclure généralement, que *le moment d'une résultante quelconque est égal à la somme ou à la différence des moments des deux composantes, suivant que le point fixe est pris au-dehors ou au-dedans de l'angle formé par les directions de ces deux puissances.*

55. Ces deux cas se distinguent toujours facilement, pour peu que l'on imagine le plan du parallélogramme des forces tellement attaché au point *M*, qu'il ne puisse tourner qu'autour de ce point : car alors si le point *M* n'est pas compris dans l'angle *B A D* des puissances, elles tendront à faire tourner dans le même sens ce plan & tout le *Systême* des lignes qui y sont décrites. Mais si ce point est compris entre les côtés de l'angle *B A D*, les deux puissances tendront à faire tourner tout ce *systême* en différents sens. On peut donc dire que le moment de la résultante est égal à la somme ou à la différence des moments des deux composantes, selon que celles-ci tendent à faire tourner le systême dans le même sens, ou en deux sens contraires.

56. En général, *quelques ſoient le nombre & les directions des puiſſances compoſantes, le moment de leur réſultante ſera toujours égal à la ſomme des moments des compoſantes qui tendent à faire tourner dans un ſens, moins la ſomme des moments de celles qui tendent à faire tourner dans le ſens contraire.*

C'eſt-là une des propoſitions les plus utiles de la théorie des moments. Outre qu'elle ſuit immédiatement de ce que nous venons de démontrer, on peut encore la rendre plus ſenſible par un raiſonnement bien ſimple que voici.

Deux quelconques des puiſſances compoſantes ont une réſultante particuliere dont le moment eſt égal à la ſomme ou à la différence de leurs propres moments. Cette réſultante à ſon tour combinée avec une troiſieme compoſante donne une ſeconde réſultante dont le moment eſt égal à la ſomme ou à la différence des trois premieres compoſantes, & ainſi des autres. Donc le moment de la réſultante générale eſt égal à la ſomme ou à la différence des moments des compoſantes; ou ce qui revient au même, le moment de la réſultante générale eſt égal à la ſomme des moments qui tendent à faire tourner dans un ſens, moins la ſomme de ceux qui tendent à faire tourner en ſens contraire.

57. Donc, *ſi le point fixe* M *ſe trouve dans la réſultante, la ſomme totale des moments des compoſantes eſt égale à zéro.* C'eſt-à-dire, qu'alors la ſomme des moments des forces qui tendent à faire tourner dans un ſens, eſt égale à la ſomme des moments de celles qui tendent à faire tourner en ſens contraire. Concluſion qu'il ne faut pas perdre de vue.

Voyons à présent à quels usages on peut faire servir, pour la composition des forces, la théorie des moments; & afin de commencer par les applications les plus simples, considérons d'abord deux forces paralleles qui agissent dans le même plan.

FIG. 10. 58. Soient donc P & Q les puissances proposées : soit M le point fixe auquel seront rapportés leurs moments. En menant la perpendiculaire $Mprq$, & en supposant que les deux puissances agissent dans le même sens, on aura généralement $R \times Mr = P \times Mp + Q \times Mq$. Si on rapportoit les moments à un autre point fixe quelconque m pris sur la même ligne Mq, on auroit pareillement $R \,.\, mr = P \,.\, mp + Q \,.\, mq$: retranchant donc cette derniere équation de la premiere, & divisant par Mm, on trouveroit $R = P + Q$, ce qui donne un résultat fort utile pour la composition des forces paralleles. On peut l'énoncer ainsi.

59. *La résultante des forces paralleles qui agissent dans le même sens, est égale à leur somme.*

60. On prouve pareillement, que la résultante de celles qui agissent en sens contraire, est égale à leur différence, lors même que le point fixe auquel on rapporte les moments, n'est pas, comme dans cet exemple, hors de l'intervalle qui sépare les directions des forces. Car quoique se trouvant entre ces directions, tel que le point O, alors P & Q ne puissent agir en sens contraire, sans tendre à faire tourner la ligne pOq dans le même sens, leur résultante n'en est pas moins égale à leur différence. Au reste, ce dernier cas nous

avertit de ne pas confondre indifféremment des forces qui tendent à faire tourner dans le même sens avec des forces qui agissent dans le même sens.

61. Il suit delà que si le point M coincide avec le point p, on aura $R . pr$, ou $(P + Q) pr = Q . pq$; d'où on tirera $P . pr = Q . qr$, & $P : Q :: qr : pr$; c'est-à-dire, que *chaque force est en raison inverse de sa distance à la résultante.* On eût trouvé la même chose, en rapportant les moments au point r de la résultante.

62. Puisque dans le cas proposé, on a ces deux équations $P . pr = Q . qr$, & $R . pr = Q . pq$, il en viendra $P : Q : R :: qr : pr : pq$; d'où nous déduirons 1°, que tous les points r de la résultante sont respectivement à égales distances des points qui leur correspondent dans les directions des deux composantes. *La résultante est donc alors parallele aux directions des composantes.*

2°, On peut représenter l'une quelconque des puissances P, Q, R par la ligne comprise entre les directions des deux autres. P, par exemple, étant représentée par qr, Q le sera par pr, & R par pq.

3°, Les puissances P & Q étant données avec leurs directions, il sera toujours aisé de trouver le point r par lequel doit passer leur résultante, au moyen de l'équation $(P + Q) pr = Q . pq$, qui donne la distance cherchée $pr = \frac{Q . pq}{P + Q}$.

63. Supposons maintenant un nombre quelconque de puissances paralleles, qui toutes agissent aussi dans le même

plan. Il eſt clair que leur réſultante ſera égale à la ſomme de celles qui agiſſent dans un ſens, moins la ſomme de celles qui agiſſent dans un ſens contraire. Et puiſque le moment de cette réſultante eſt égal à la ſomme des moments de toutes les compoſantes, la diſtance de ſa direction à un point donné ſe trouvera en diviſant la ſomme des moments des compoſantes par la réſultante, ou ce qui eſt la même choſe, par la ſomme des forces. Mais ſouvenez-vous bien que ſi parmi ces forces, il y en a qui tendent à faire tourner le ſyſtême en ſens contraire, on doit prendre leurs moments avec des ſignes négatifs ; & s'il s'en trouve quelqu'une qui agiſſe en ſens contraire aux autres, il faut l'écrire avec un ſigne négatif auſſi dans la ſomme totale des forces.

Ce que nous venons de dire, eſt ſuffiſant pour déterminer la réſultante de tant de puiſſances paralleles qu'on voudra, pourvu qu'elles ſoient toutes ſituées dans le même plan. Paſſons donc à la méthode de déterminer cette réſultante, lorſque les compoſantes ſont obliques, quoique toujours dans le même plan.

Fig. 11. 64. J'en ſuppoſe quatre P, Q, S, T, que je repréſente par les directions obliques Pp, Qq, Ss, Tt, leſquelles indiquent le ſens de leurs actions reſpectives. Cela poſé, ſoit pris à volonté dans le plan de ces forces un point C par lequel on menera les perpendiculaires CP'', Cp''. Après quoi, décompoſant (49) chaque force, comme Pp, en deux autres PP', Pp' reſpectivement paralleles à ces perpendiculaires, on aura en tout huit nouvelles forces, dont quatre

feront paralleles à CP'', & les quatre autres paralleles à Cp''.

Or la résultante de celles-ci agit de haut en bas, & sa valeur est $TT' + SS' + QQ' - PP'$. Quant à sa direction, on peut la déterminer par sa distance à la ligne Cp'', & on trouvera que cette distance est généralement exprimée par $\frac{SS' . Ss'' + QQ' . Qq'' - PP' . Pp'' - TT' . Tt''}{TT' + SS' + QQ' - PP'}$.

La résultante des forces paralleles à CP'' agit de droite à gauche. Sa valeur est $Tt' + Ss' - Qq' - Pp'$; & la distance de sa direction à la ligne CP'' est

$$\frac{Tt' . TT'' + Ss' . SS'' - Qq' . QQ'' - Pp' . PP''}{Tt' + Ss' - Qq' - Pp'}$$

Soit donc représentée par CR'' la distance de la premiere résultante à la ligne Cp'', & par Cr'' la distance de l'autre à la ligne CP''. Si on acheve le rectangle $R''Cr''R$, on aura $R''R$ pour la direction de la premiere résultante, & $r''R$ pour la direction de la seconde. Ces deux résultantes uniront donc leurs efforts au point d'interfection R; & par conséquent, si on prend d'un côté $RR' = TT' + SS' + QQ' - PP'$, & de l'autre $Rr' = Tt' + Ss' - Qq' - Pp'$, il est évident qu'en achevant le rectangle $r'RR'r$, la diagonale Rr fera enfin la valeur & la direction de la résultante générale que l'on cherche.

Il n'est donc pas difficile de trouver la résultante de tant de forces perpendiculaires ou obliques que l'on voudra, pourvu qu'on les suppose toutes dans le même plan. Reste à la déterminer, cette résultante, quand les puissances dont elle est composée, sont dans des plans différents.

65. Afin de procéder toujours du plus ſimple au plus composé, nous ſuppoſerons d'abord que les puiſſances ne ſont qu'au nombre de trois, qu'elles agiſſent toutes dans le même ſens, & que leurs directions ſont toutes paralleles entr'elles, quoiqu'elles ſoient dans trois plans différents.

Fig. 12. Soient donc P, Q, S ces trois puiſſances, ſoit TCP' un plan perpendiculaire à leurs directions (il faut ici ſuppléer un peu par l'imagination, à ce qu'on ne peut guere repréſenter qu'imparfaitement par des figures. On peut concevoir, par exemple, un priſme triangulaire droit, dont les trois faces ſeront les plans des trois puiſſances, & dont une des baſes ſera le plan perpendiculaire TCP'). Ayant pris dans ce plan un point quelconque C, on menera les lignes CT, CP' perpendiculaires entr'elles.

Cela poſé, la réſultante M des deux puiſſances Pp, Qq ſera égale à leur ſomme, elle ſera ſituée dans leur plan, & leur ſera parallele. De plus elle paſſera à une diſtance $PM = \frac{Q}{P+Q} PQ$.

Pareillement, la réſultante R des puiſſances Mm, Ss, ſera égale à leur ſomme $P + Q + S$, elle ſera ſituée dans leur plan, leur ſera parallele, & paſſera à la diſtance $MR = \frac{S}{P+Q+S} MS$.

66. D'où il ſuit en général, que *la réſultante de pluſieurs forces paralleles ſituées dans des plans quelconques, eſt égale à leur ſomme, lorſqu'elles agiſſent dans le même ſens.*

Pour déterminer ſa poſition, on menera des points P, M, Q, R, S des perpendiculaires à CP', & faiſant CS'

=

$= a$, $CQ' = b$, $CP' = c$, on aura $P'Q' = c - b$, $Q'S' = b - a$, $P'S' = c - a$. Cela posé, les paralleles PP', MM', QQ', RR', SS' donneront 1°, $P'M' : P'Q' :: PM : PQ :: Q : P + Q$; substituant donc la valeur de $P'Q'$, on aura $P'M' = \frac{Q(c-b)}{P+Q}$.

2°, $S'R' : S'M' :: SR : SM :: P + Q : P + Q + S$; donc $S'R' = \frac{S'M'(P+Q)}{P+Q+S} = \frac{P(c-a)+Q(b-a)}{P+Q+S}$; donc $CR' = a + S'R' = \frac{aS + bQ + cP}{P+Q+S} = \frac{P.CP' + Q.CQ' + S.CS'}{P+Q+S}$.

Maintenant supposons une droite CV parallele aux directions des puissances, & nous aurons la distance RR'' de la résultante à un plan VCT, (lequel se trouve nécessairement parallele à ces directions) en divisant la somme des moments par rapport à ce plan, par la somme des forces.

Le procédé est le même pour connoître la distance RR' de la résultante à un autre plan VCP' parallele aux directions des puissances, & perpendiculaire au premier. Nous aurons donc le point R, par où doit passer la résultante cherchée; ainsi sa position sera déterminée. On a déja calculé sa valeur. On connoîtra donc la résultante d'un nombre quelconque de forces qui agissent dans différents plans, & qui sont toutes paralleles.

67. Enfin si ces forces étoient obliques; on imagineroit menées d'un point quelconque A, trois lignes AB, AC, AD, perpendiculaires entr'elles (figurez-vous les trois côtés, les trois arêtes qui dans un cube, par exemple, aboutissent au sommet du même angle solide); & supposant FIG. 13.

F

que Pp eſt une des puiſſances obliques, on la décompoſeroit en deux autres, dont l'une PP' ſeroit parallele au plan ABD, pendant que la ſeconde Pp' ſeroit parallele au plan DAC.

On décompoſeroit de même cette ſeconde puiſſance Pp' en deux autres Pp'', Pp''', l'une parallele à AC, l'autre à AD : ce qui donneroit pour la ſeule force compoſante Pp, trois nouvelles puiſſances dont les directions ſeroient reſpectivement paralleles à trois lignes données de poſition.

Après avoir ainſi décompoſé chacune des autres forces en trois autres paralleles aux mêmes lignes, on chercheroit, par ce que nous avons déja dit, la réſultante particuliere de toutes les forces paralleles à la droite AB, puis celle des forces paralleles à AD, & enfin celle des forces paralleles à AC. On auroit donc, à déterminer, en derniere analyſe, la réſultante générale de trois réſultantes particulieres ſituées dans des plans différents, à la vérité, mais paralleles entre elles, ce qui rentre dans le cas précédent.

68. En ſuivant cette méthode, on peut donc réduire toutes les forces propoſées à trois autres forces reſpectivement paralleles à trois lignes perpendiculaires entr'elles. On pourroit même les réduire toutes à deux, en ne faiſant ſubir à chacune qu'une ſimple décompoſition : mais il n'eſt pas poſſible de les réduire généralement à une ſeule, comme cela ſe pratique pour les forces qui ſont toutes dans le même plan.

Après avoir ainſi développé les principes de la compoſition & de la décompoſition des forces, nous termi-

nerons cet article par quelques remarques analogues au ſujet que nous venons de traiter.

REMARQUE I.

69. RIEN n'eſt plus ordinaire dans la Nature que les exemples du mouvement compoſé. Le bateau qui dérive en traverſant une riviere, la flamme & la fumée que le moindre ſouffle fait dévier, la pluie, la neige, la grêle qui tombent plus ou moins obliquement, ſelon que le vent eſt plus ou moins impétueux, le noyau qui s'échappe de nos doigts quand nous le preſſons d'une certaine maniere, les ſecouſſes que l'on éprouve dans deux voitures qui s'accrochent, le riſque que l'on court en deſcendant bruſquement d'un cheval qui galoppe, le poiſſon qui par deux coups de queue frappés en ſens contraires, prend une direction mitoyenne, tout nous offre des applications ſans nombre du principe très-fécond de la compoſition des forces.

On verra par la ſuite de quelle utilité eſt leur décompoſition, dont les exemples ne ſont pas moins fréquents, & que la meſure des forces obliques ſur-tout rend ſi néceſſaire.

REMARQUE II.

70. CE n'eſt pas ſans raiſon que l'on diſtingue en Méchanique deux ſortes de mouvement, celui qu'on nomme *abſolu*, & celui qu'on nomme *relatif*. Ils ſont fort différents l'un de l'autre. On peut en juger par l'exemple ſuivant.

Le Marin qui dort paiſiblement dans ſon vaiſſeau, eſt en repos, il eſt vrai, par rapport aux différentes parties du navire; mais ſon ſang qui circule ſans ceſſe, ſe meut réelle-

ment par rapport à lui. Il se meut lui-même par rapport aux objets placés hors du vaisseau dont il partage le mouvement; alors son sang est mû par deux causes simultanées, dont l'une est l'action du cœur, & l'autre la force qui pousse le navire. Ces deux puissances font naître d'abord un mouvement composé dans le sang de ce Marin.

Mais s'il s'éveille, & s'il marche, voilà un troisieme mouvement auquel son sang participera. Si la Mer est orageuse, en voilà un quatrieme que le roulis du vaisseau lui imprimera. Si la Terre tourne autour de son axe, il en résultera un cinquieme; s'il elle a de plus un mouvement de translation dans l'écliptique, si son axe éprouve des nutations, si l'écliptique elle-même est sujette à des mouvements qui lui soient propres relativement à ce qu'on appelle l'espace absolu, si des courants particuliers font dériver le navire, & si à toutes ces causes il s'en joint d'autres encore, il est évident que le mouvement absolu du sang de ce Marin est composé de tous ces mouvements particuliers. Or qui pourra nous dire quelle est leur intensité, quelle est leur direction, & par conséquent quelle doit en être l'influence?

REMARQUE III.

71. ON voit, par ce simple exposé, qu'il n'y a pas dans le monde un seul mouvement absolu que nous connoissions avec quelque apparence d'exactitude: & cela faute d'objets absolument immobiles placés loin de la terre & de tout ce qui forme le systême solaire, auxquels nous puissions rapporter, comme à des points invariables, tous les mouvements qui tombent sous nos sens.

Il eſt vrai que les étoiles fixes nous ſervent d'objets de comparaiſon, parce qu'elles nous paroiſſent conſerver en-tr'elles des diſtances inaltérables. Mais peut-être ne le jugeons-nous ainſi que par une ſuite de l'illuſion ſi naturelle qui nous porte à croire que le vaiſſeau dans lequel nous ſommes renfermés, n'éprouve aucun mouvement, parce que nous ne voyons rien remuer de tout ce qui nous y entoure. Peut-être auſſi que ces Aſtres ont des mouvements tout auſſi compoſés que les nôtres, & que la prodigieuſe diſtance qui nous ſépare, rend leurs variations inſenſibles aux yeux mêmes des plus habiles Aſtronomes. On a là-deſſus plus que des ſoupçons, depuis que l'Aſtronomie moderne a perfectionné l'art d'obſerver.

REMARQUE IV.

72. Au reſte, les loix du mouvement n'en ſeroient pas moins invariables, quand bien même on ſuppoſeroit mobile l'eſpace dans lequel elles ont leur effet : parce que tous les mouvements particuliers s'exécuteroient de même. Qu'un vaiſſeau vogue à pleines voiles, ou qu'il ait jetté l'ancre, ou qu'il ſoit échoué ſur un banc de ſable, le Pilote pourra tracer avec la même facilité les lignes & les figures néceſſaires pour l'eſtimation de ſa route, & l'équipage fera également les manœuvres convenables. Que la terre ſoit emportée par ſon mouvement annuel, qu'elle tourne chaque jour autour de ſon axe, ou qu'elle ſoit parfaitement immobile, tout cela eſt indifférent pour le choc des corps, & pour l'équilibre des puiſſances dont nous aurons à calculer les effets. Les mou-

vements relatifs font les feuls qui nous intéreffent. Paffons au dernier principe général de la Méchanique.

Théorie de l'Equilibre.

73. L'équilibre, comme tout le monde fait, réfulte des efforts mutuels que des puiffances égales & oppofées, font les unes contre les autres. Si un corps, par exemple, eft follicité au mouvement par deux forces abfolument égales & diamétralement oppofées, il eft évident que ce corps doit refter immobile, parce qu'il ne peut obéir à aucune de ces deux impulfions. Alors les forces qui le preffent, demeurent en équilibre, & les chofes ne changeroient jamais, fi des caufes étrangeres ne terminoient pas cette efpece de combat.

74. Pareillement, fi deux maffes égales animées d'une même vîteffe fuivant des directions oppofées, viennent à la rencontre l'une de l'autre, elles doivent néceffairement ref-ter en repos après leur collifion, parce qu'aucune ne peut prévaloir. (On fait abftraction ici de toutes les qualités purement acceffoires de la matiere, ainfi on fuppofe ces maffes deftituées de toute élafticité).

75. Il en feroit de même, au cas que deux maffes inégales M, m vinffent fe frapper mutuellement en fens contraire, avec des vîteffes V, v réciproquement proportionnelles à M, m. Car alors leurs quantités de mouvement feroient égales (22). Elles fe contre-balanceroient donc par des efforts égaux, d'où réfulteroit un parfait équilibre.

[D'ailleurs pour ramener ce second cas au premier, ★ suppoſons la vîteſſe V du corps M double de la vîteſſe v du corps m; mais en même temps la maſſe de celui-ci double de l'autre. On pourra donc regarder le corps m comme partagé en deux maſſes, l'une antérieure, l'autre poſtérieure, chacune égale à celle du corps M, & chacune animée de la vîteſſe commune v. Au lieu cependant de cette vîteſſe, on peut ſubſtituer, par exemple, dans la partie antérieure la vîteſſe $2v$ en avant, & la vîteſſe v en arriere; & par cette décompoſition qui n'eſt ni ſans exemple ni ſans utilité, la partie antérieure, animée de la vîteſſe $2v$, fera équilibre au corps M, (puiſqu'à elle-ſeule elle aura la même maſſe & la même vîteſſe que lui), pendant qu'avec la vîteſſe contraire v, elle fera équilibre à la partie poſtérieure, pour la même raiſon. Le tout demeurera donc en équilibre.

Mais pour généraliſer un peu cet exemple, ſuppoſons que les deux maſſes M, m ſont entr'elles comme deux nombres entiers quelconques E, e. On aura $M = \frac{mE}{e}$, & $v = \frac{VE}{e}$, ou en faiſant $\frac{m}{e} = p$, & $\frac{V}{e} = q$, $M = Ep$, & $v = Eq$. Or on peut ſubſtituer à la maſſe $M = Ep$, animée de la vîteſſe $V = eq$, un nombre $E \times e$ de maſſes p animées de la vîteſſe q. On peut ſubſtituer de même à la maſſe $m = ep$ animée de la vîteſſe $v = Eq$, un nombre $E \times e$ de maſſes p animées de la vîteſſe q. Il y aura donc généralement équilibre dans l'hypotheſe préſente, entre deux corps quelconques, toutes les fois que leurs maſſes M, m ſeront dans un rapport rationel.

Cet équilibre n'auroit pas moins lieu, quand bien même on ſuppoſeroit incommenſurable le rapport des deux maſſes, puiſqu'il ſeroit toujours poſſible d'exprimer ce rapport en nombres rationels, de maniere que l'erreur fût moindre que toute quantité donnée. Lors donc que les maſſes ſont en raiſon inverſe des vîteſſes, dans deux mobiles qui agiſſent l'un contre l'autre en ſens contraires, l'équilibre a toujours lieu. Nous avons déja dit qu'il avoit lieu auſſi, lorſque les maſſes & les vîteſſes oppoſées étoient égales. On doit donc regarder comme inconteſtable la propoſition ſuivante.]

*

Principe de l'Equilibre.

76. *Deux corps ſe font équilibre, toutes les fois que leurs directions étant oppoſées, leurs quantités de mouvement ſont égales.*

Conſéquences qui en réſultent.

Fig. 14. 77. I. Si deux corps M, m ſe pouſſoient en ſens contraire au moyen d'un levier inflexible, ou, ſi attachés par un fil inextenſible, ils tendoient à s'écarter l'un de l'autre, avec des quantités de mouvement égales, il y auroit néceſſairement équilibre entr'eux : car alors leur action réciproque ſeroit indépendante de la diſtance Mm.

Fig. 15. 78. II. Si des trois corps M', M, m, liés au même fil, les deux derniers tiroient dans un ſens oppoſé à celui du corps M', il faudroit, pour l'équilibre, que la quantité de mouvement de M' fût égale à la ſomme des quantités de mouvement des deux autres corps.

79.

79. III. En général, quelque soit le nombre des corps suspendus au même fil, ou liés ensemble par la même verge, & agissant les uns contre les autres, ils resteront en équilibre, si la somme des quantités de mouvement de ceux qui tirent dans un sens, est égale à la somme des quantités de mouvement de ceux qui tirent dans le sens contraire.

80. IV. Et puisque les puissances se mesurent par les quantités de mouvement qu'elles sont capables de produire dans des masses données, il suit que lorsque des puissances quelconques agissent mutuellement les unes contre les autres, elles doivent garder l'équilibre, dans tous les cas où la somme de celles qui agissent en un sens, est égale à la somme de celles qui font effort en sens contraire.

81. V. *L'équilibre aura donc toujours lieu entre des puissances quelconques, quelles que soient leurs directions, lorsque leur résultante sera zéro.*

Remarque.

Les principes que nous avons développés dans cette Introduction, peuvent être regardés comme des loix générales, qui dérivent uniquement de la simple existence de la matiere & du mouvement, abstraction faite de toute hypothese physique. Ces loix auroient donc lieu dans la Nature, si elles ne recevoient pas des modifications sans nombre, d'une foule d'obstacles.

Voyons donc maintenant jusqu'à quel point ces obstacles peuvent influer dans tout ce qui a rapport à l'équi-

libre & au mouvement. Pour procéder avec ordre, nous n'examinerons les conditions de l'équilibre dans les machines, qu'après avoir détaillé la théorie fort utile des centres de gravité. C'eſt à la diſcuſſion de ces deux objets, que ſont deſtinées les deux Sections de la Statique. La premiere contient les méthodes & les formules néceſſaires pour déterminer dans tous les cas le centre de gravité. La ſeconde a pour but la deſcription, les propriétés, le calcul, & les uſages des principales machines.

Après avoir ainſi diſcuté dans la premiere Partie de cet Ouvrage, ce qui a rapport à l'équilibre, nous traiterons dans la ſeconde ce qui concerne le mouvement.



PREMIERE PARTIE DE LA MÉCHANIQUE OU LA STATIQUE.

SECTION I.

Des Centres de Gravité.

I.

82. Nous éprouvons tous qu'un corps abandonné à lui-même tombe perpendiculairement à l'horizon, & que lors même qu'on le ſoutient, ce corps tend à ſe rapprocher de la ſurface de la terre, par un effort dirigé dans le même ſens.

Des obſervations ſans nombre atteſtent qu'il en eſt de même dans tous les pays, & que ce phénomene n'a pas moins lieu ſur les ſommets des plus hautes montagnes, que dans les plaines & les vallons. Par-tout, juſques dans les

plus profonds abîmes, les corps cherchent, pour ainsi dire, à descendre de plus en plus vers un point fixe, qui est visiblement le centre de la terre, puisqu'elle est sensiblement ronde, & que les directions perpendiculaires aux divers horizons tendent toutes vers son centre.

Mais cette tendance universelle n'est point essentielle aux corps. C'est un effort réel, dont la matiere, par elle-même, est incapable : rien dans sa nature ne l'exige, rien ne le produit, & son inertie est un obstacle de plus à l'existence d'un pareil effort. Il a donc pour principe quelque force extérieure dirigée vers le centre de la terre; & c'est cette force qui, comme nous l'avons déja dit, s'appelle *Gravité*, *Pesanteur*, *Gravitation*, ou *Attraction*.

Quoiqu'il n'y ait que des opinions tout au plus vraisemblables sur la cause de la pesanteur, il est aisé cependant de constater son existence, & de connoître ses effets. Or son existence une fois avérée, & ses effets une fois connus, il n'en faut pas davantage pour expliquer tout ce qui a rapport au mouvement & à l'équilibre des corps graves. Voici donc les observations les plus constantes sur la pesanteur.

II.

83. 1°, Elle agit également sur toutes les parties matérielles des corps terrestres, c'est-à-dire, que dans le même temps elle leur communique la même vîtesse. On s'en est assûré, en laissant tomber au même instant & de la même hauteur des masses très-inégales. Le temps de leur chûte est absolument égal, quand on fait l'expérience sous le

récipient de la machine pneumatique. Tous les Physiciens savent que l'or, par exemple, quoique le plus compact des métaux, ne descend pas alors plus vîte, quand on l'abandonne à sa seule gravité, que la laine, & la plume la plus légere. Si le temps de leur chûte n'est pas le même hors du récipient, c'est que l'air s'oppose inégalement à leur descente. Concluons donc que la pesanteur est une force qui tend à imprimer à tous les corps la même vîtesse dans le même temps.

III.

84. 2°, Dans un même lieu de la terre & dans toutes les saisons de l'année, la pesanteur fait parcourir aux corps libres le même espace dans le même temps, du moins sans différence essentielle. Elle est donc une force constante qui agit également.

85. 3°, Et puisque son action se renouvelle à chaque instant sur tous les corps, soit pendant leur repos, soit pendant leur mouvement, on doit en conclure, qu'elle est une force accélératrice, universelle & constante. Delà vient que dans tous les pays, un corps descend avec d'autant plus de vîtesse, qu'il a été soumis plus long-temps à l'impression de la gravité.

86. 4°, Au reste, la vîtesse que la pesanteur imprime dans un instant infiniment petit à un corps quelconque, est infiniment petite, sans quoi la vîtesse imprimée au bout d'un temps fini seroit infinie, ce qui est impossible. L'action instantanée de la pesanteur n'est donc comparable à

aucune puiſſance finie, quelque petite qu'on la ſuppoſe, puiſque celle-ci produit une vîteſſe finie dans un inſtant. Ce n'eſt qu'après un temps fini que l'effet de la peſanteur eſt comparable à celui des autres puiſſances motrices.

IV.

87. 5°, Les directions de la peſanteur ſont paralleles dans un même lieu. Deux fils à-plomb, par exemple, gardent entr'eux un parallélisme ſenſible, dans un même bâtiment, dans une même ville, & en général dans tous les lieux qui ont ſenſiblement le même horizon. Cela n'empêche pas de regarder ces directions comme devant ſe réunir au centre de la terre, parce que la diſtance de ce centre à la ſurface peut être réputée infinie, par rapport à celle qui ſépare les deux fils à-plomb.

88. 6°, Des obſervations exactes & fréquentes ont appris qu'un corps qui deſcend librement en vertu de ſa peſanteur, ſous la latitude de Paris, parcourt 15 pieds un pouce une ligne $\frac{7}{9}$, ou 15 ^{p}, 098, ou plus exactement encore 2173, 631356 lignes, dans la premiere ſeconde de ſa chûte. Il parcourt dans la ſeconde qui ſuit, 45 pieds 3 pouces 5 lig. $\frac{1}{3}$; & dans la troiſieme, 75 pieds 5 pouces 9 lignes.

Delà on pourroit facilement déduire les formules néceſſaires pour déterminer dans le mouvement des corps graves, ſoit le temps de leur chûte, ſoit les hauteurs dont ils deſcendent, ſoit la vîteſſe qu'ils ont acquiſe à un inſtant quelconque. Mais nous en réſervons le calcul pour la Dynamique. Il ne s'agit ici que d'équilibre; & ſi nous avons

commencé par donner quelques notions sur la pesanteur, ce n'est que pour rendre plus intelligible la théorie des centres de gravité, que nous allons exposer.

Définition du centre de Gravité, avec la maniere de le déterminer, lorsque les corps sont sur une même droite.

89. Puisque la pesanteur agit également sur toutes les parties de matiere qui composent une masse quelconque; chacune de ces parties fait donc un effort égal pour se rapprocher du centre de la terre. De tous ces efforts particuliers unis ensemble résulte l'effort général du corps entier vers le même centre, & cet effort total s'appelle le *Poids* du corps.

90. Le poids d'un corps quelconque est donc égal à la quantité de mouvement que la pesanteur tend à imprimer continuellement à ce corps: il est donc proportionnel à la masse, puisque la vîtesse de toutes les parties est la même.

Or ce poids ne peut être soutenu que par une puissance dont l'énergie lui est, tout au moins, égale. Il peut donc être regardé lui-même comme une puissance réelle dont l'effort s'exerce perpendiculairement à l'horizon. Deux ou plusieurs poids peuvent donc être comparés ensemble, & se contre-balancer mutuellement comme toutes les autres forces méchaniques.

Mais à cause de la liaison qui se trouve entre les diverses parties d'un même corps, l'une ne peut obéir à la pesanteur, si toutes les autres ne lui obéissent en même temps.

Donc puiſque les directions, ſuivant leſquelles la gravité les ſollicite, ſont toutes paralleles, leur réſultante doit toujours paſſer par quelque point intermédiaire, qui eſt en quelque ſorte le centre de réunion de toutes leurs forces particulieres. C'eſt ce point unique dans chaque corps, que l'on appelle ſon centre de gravité.

91. Et comme ce point étant ſoutenu, le corps reſte néceſſairement en équilibre, puiſqu'alors la réſultante eſt zéro; réciproquement un corps ne peut reſter en équilibre, ſi ce point n'eſt ſoutenu. Car faute de ſoutien, la réſultante aura ſon effet, & le corps tombera. Concluons donc que *le centre de gravité d'un corps eſt un point dans lequel on conçoit que tout le poids de ce corps ſe réunit & ſe concentre, de maniere qu'en ſoutenant ce point ſeul, on ſoutient le corps entier en équilibre, dans tous les cas.*

92. On pourroit dire auſſi que le centre de gravité d'un ſyſtême quelconque de corps eſt un point par lequel paſſe la réſultante de tous les efforts particuliers que chaque partie du ſyſtême fait en vertu de ſa peſanteur, quelle que ſoit la ſituation de ces corps.

93. Pour déterminer ce point, il ſuffit de placer le ſyſtême dans deux ſituations différentes, & de déterminer à chaque fois la direction de la réſultante : car ſi vous prolongez ces deux directions, elles ſe rencontreront néceſſairement, & le point de leur rencontre ſera le centre de gravité que vous cherchez.

Il ſuffira, pour vous en convaincre, de démontrer que dans

dans toute autre ſituation du ſyſtême, la réſultante paſſera toujours par ce point de rencontre. Pour cela, ſoient tant de corps que vous voudrez, M, P, Q placés ſur une même ligne droite que nous ſuppoſerons inflexible & ſans maſſe : & afin de ſimplifier encore davantage, nous regarderons ces corps comme autant de points où leurs maſſes ſont concentrées. Soit g la vîteſſe que la gravité leur imprime dans un certain temps, dans une ſeconde par exemple, ſuivant les lignes Mm, Pp, Qq perpendiculaires à l'horizon; on aura Mg, Pg, Qg pour leurs quantités de mouvement. Ces forces pouvant être regardées comme de véritables puiſſances appliquées aux points M, P, Q, & paralleles entr'elles, on prendra arbitrairement ſur le prolongement de QM, un point C, par lequel on menera la droite $Cm'p'q'$ perpendiculaire à leurs directions. Fig. 16.

Cela poſé, on aura la diſtance Cr' à la direction de la réſultante, en faiſant (63) $Cr' = \frac{Mg \cdot Cm' + Pg \cdot Cp' + Qg \cdot Cq'}{Mg + Pg + Qg} = \frac{M \cdot Cm' + P \cdot Cp' + Q \cdot Cq'}{M + P + Q}$; d'où l'on tirera par la nature des lignes proportionnelles, $CR = \frac{M \cdot CM + P \cdot CP + Q \cdot CQ}{M + P + Q}$ = la diſtance du centre de gravité R au point C : or cette valeur de CR ne dépend en aucune façon de l'obliquité de la ligne MQ par rapport à l'horizontale : donc la réſultante de cet aſſemblage ou de ce ſyſtême de corps, paſſera toujours par le centre de gravité que nous venons de déterminer, quelque ſoit la ſituation du ſyſtême.

94. Et delà il ſuit, que *ſi tant de corps qu'on voudra,*

considérés comme des points, sont situés sur la même ligne, on trouvera la distance du centre de gravité à un point quelconque pris sur cette ligne, en multipliant chaque masse par sa distance à ce point, & divisant la somme des produits par la somme des masses.

95. Appellant donc, *Moment*, le produit d'une masse quelconque par sa distance à un point ou à une ligne, on aura toujours la distance de ce point ou de cette ligne au centre de gravité, en divisant la somme des moments par la somme des masses.

REMARQUE.

OBSERVEZ cependant que dans le cas où il y auroit des corps placés aux deux côtés du point fixe, ce ne seroit pas la somme totale des moments qu'il faudroit prendre, mais bien la différence des sommes de part & d'autre.

96. Observez aussi, qu'au cas où tous les corps dont on cherche le centre commun de gravité seroient homogenes, & par conséquent d'une égale densité, ainsi que nous le supposerons dans la suite, on pourroit substituer leurs simples volumes à leurs masses, afin de réduire la recherche des centres de gravité à une question de pure Géométrie.

Recherche du centre de Gravité, lorsque les corps ne sont pas sur une même ligne, quoique tous situés dans le même plan.

Fig. 17. 97. JE suppose que les trois corps *M*, *P*, *Q* considérés comme de simples points où leurs efforts particuliers en vertu

de la pesanteur se réunissent, soient disposés en triangle dans un même plan. Alors menant par un point quelconque C pris dans ce plan, une droite horizontale Cp, & une droite verticale Cp', je pourrai tirer des perpendiculaires de chaque point pesant sur chacune de ces deux droites. Au moyen de ces perpendiculaires, je trouverai bien aisément que la résultante de ce systême triangulaire, considéré dans sa position actuelle, passera à une distance

$$Rr' = \frac{M \cdot Mm' + P \cdot Pp' + Q \cdot Qq'}{M + P + Q}.$$

Et si je suppose que tout le systême fasse maintenant un quart de révolution, de maniere que l'horizontale Cp devienne verticale, je trouverai pareillement que la résultante dans cette nouvelle position passera à une distance

$$Rr = \frac{M \cdot Mm + P \cdot Pp + Q \cdot Qq}{M + P + Q}.$$

Je connoîtrai donc le centre de gravité R; mais reste à faire voir que dans toute autre situation du systême, la résultante doit passer par ce centre.

Or nous savons déja (57) que la somme des moments rapportés à un point quelconque de la résultante est nécessairement zéro, ensorte qu'on peut assûrer qu'un point appartient à la résultante, toutes les fois que la somme des moments rapportés à ce point, est nulle. Donc si AB est la Fig. 18. résultante d'un systême quelconque dans une premiere situation, & si dans une seconde position perpendiculaire à la premiere, la résultante est CD perpendiculaire à AB, il suffira de prouver que la résultante dans toute autre position est

assujettie à passer par leur point de rencontre G, ou ce qui revient au même, que la somme des moments pris par rapport à une autre résultante quelconque EF est zéro.

98. Soit donc M un des points pesants du systême, duquel on mene les perpendiculaires MP, MQ, MR aux trois axes qui représentent nos trois résultantes. On aura l'angle $PGM = PGQ - MGQ$, & par conséquent $\sin PGM = \sin PGQ \cos MGQ - \sin MGQ \cos PGQ$; d'où l'on tirera $\frac{MP}{GM} = \sin PGQ \cdot \frac{GQ}{GM} - \cos PGQ \cdot \frac{MQ}{GM}$; ce qui donne $PM = \sin PGQ \cdot MR - \cos PGQ \cdot MQ$. Prenant donc le moment du point M par rapport à l'axe EF, on aura $M \cdot PM = \sin PGQ \cdot M \cdot MR - \cos PGQ \cdot M \cdot MQ$, & la somme des moments $\int M \cdot PM = \sin PGQ \cdot \int M \cdot MR - \cos PGQ \cdot \int M \cdot MQ$. Or AB & CD étant deux résultantes, la somme des moments de M pris par rapport à elles doit être nulle : donc $\int M \cdot MR = 0$, & $\int M \cdot MQ = 0$; ce qui donne enfin $\int M \cdot PM = 0$: donc la somme des moments rapportés à une troisieme résultante quelconque EF est zéro. Cette résultante passe donc toujours par le centre de gravité que l'intersection des deux premieres fait connoître.

Recherche du centre de Gravité, lorsque les corps sont situés dans différents plans.

Fig. 19. 99. Soient deux plans ABC, BCd perpendiculaires entr'eux & à l'horizon. Si de chaque point pesant M, P, Q on mene des perpendiculaires sur chacun de ces deux plans,

on aura d'abord (66) la diſtance Rr de la réſultante dans cette premiere ſituation, au plan ABC, en prenant la ſomme des moments par rapport à ce plan, & la diviſant par la ſomme des maſſes; ce qui donnera

$$Rr = \frac{M \cdot Mm + P \cdot Pp + Q \cdot Qq}{M + P + Q}.$$

On trouvera enſuite par un calcul ſemblable ſa diſtance au plan BCd, qui eſt

$$Rr' = \frac{M \cdot Mm' + P \cdot Pp' + Q \cdot Qq'}{M + P + Q}.$$

Mais avec ces deux diſtances on ne peut encore déterminer que la réſultante que l'on fait être perpendiculaire à l'horizon comme les plans ABC, BCd, & qui doit paſſer par le point d'interſection R des deux diſtances. On ſait à la vérité que le centre de gravité que l'on cherche, doit être ſur un des points de cette réſultante; mais quel eſt ce point?

Pour le déterminer, on imaginera le ſyſtême renverſé dans une ſituation perpendiculaire, de telle façon que le plan horizontal aCd devienne vertical: & dans cette nouvelle ſituation, la ſeconde réſultante paſſera à une diſtance de ce plan, laquelle aura pour valeur la ſomme des moments rapportés à ce troiſieme plan, diviſée par la ſomme des maſſes.

100. Donc *pour connoître le centre de gravité d'un ſyſtême quelconque dont les parties ſont ſituées dans différents plans, il faut ſuppoſer trois plans perpendiculaires entr'eux, & la ſomme des moments pris par rapport à chaque plan, diviſée par la ſomme des maſſes, donnera la diſtance du centre de gravité à chacun de ces plans.*

Or ces trois diſtances une fois connues, il n'en faut pas davantage pour déterminer le centre de gravité. Il manqueroit cependant quelque choſe à cette théorie, ſi on ne démontroit pas que la réſultante dans toute autre ſituation du ſyſtême, doit néceſſairement paſſer par le centre de gravité ainſi déterminé. Pour le démontrer, il ſuffit de faire voir que ſi la ſomme des moments pris ſucceſſivement par rapport à trois plans qui paſſent par le centre de gravité, eſt nulle, cette même ſomme priſe par rapport à tout autre plan qui paſſera par ce point, doit être nulle auſſi.

Fig. 20. 101. Soient donc AGC, AGB, CGB trois plans perpendiculaires entr'eux, & par rapport auxquels la ſomme des moments eſt zéro. Soit un autre plan quelconque GVN paſſant par le centre de gravité G. Soit M un des points peſants du ſyſtême, duquel on mene la perpendiculaire MQ au plan CGB : du point de projection Q, imaginez une perpendiculaire QP tirée ſur la droite GB. Imaginez enſuite un plan $MQVN$ perpendiculaire au plan GVN, & dans ce plan concevez enfin la droite MN perpendiculaire à leur interſection commune NV; la droite QV ſera perpendiculaire à GV, & l'angle QVN meſurera l'inclinaiſon des plans CGB, GVN.

Tout ceci une fois conçu, la démonſtration n'eſt pas difficile. Cependant afin de l'abréger, ſuppoſons $GP = x$, $PQ = y$, $MQ = z$, l'angle $VGB = a$, & l'angle $QVN = b$.

On aura 1°, l'angle $QGV = QGP - a$, ce qui donne

$\sin QGV = \sin QGP \cos a - \sin a \cos QGP$; d'où l'on déduit $QV = y \cos a - x \sin a$.

On aura 2°, l'angle $MVN = b - QVM$, ce qui donne $\sin MVN = \sin b \cos QVM - \sin QVM \cos b$; d'où l'on déduit $MN = \sin b \,.\, QV - MQ \,.\, \cos b = - x \sin a \sin b + y \cos a \sin b - z \cos b$.

Or MN étant la perpendiculaire menée du point M sur le plan GVN, on aura pour la somme des moments rapportés à ce plan, $\int M \,.\, MN = - \sin a \sin b \,.\, \int M \,.\, x + \cos a \sin b \,.\, \int M \,.\, y - \cos b \,.\, \int M \,.\, z$.

Et puisque x, y, z sont les distances respectives du point M aux trois plans perpendiculaires entr'eux, les sommes des moments $\int M \,.\, x$, $\int M \,.\, y$, $\int M \,.\, z$ pris par rapport à ces mêmes plans sont donc nulles. La somme des moments $\int M \,.\, MN$, rapportés à un quatrieme plan quelconque GVN, est donc nulle aussi.

102. Après avoir ainsi développé la méthode de déterminer les centres de gravité d'un systême quelconque de corps situés dans un même plan, ou dans des plans différents : après avoir prouvé que dans chaque corps & dans chaque systême de corps le centre de gravité est un point unique, qui reste toujours le même dans toutes les situations possibles, il est à propos maintenant, d'appliquer ces principes à la détermination du centre de gravité dans les corps que la Géométrie nous apprend à mesurer & à connoître. Cette application, au reste, n'est pas à beaucoup près d'une stérile curiosité : elle réunit le double avantage

de rappeller les formules les plus utiles de l'analyse, & de servir de fondement à la Statique dont les arts ne sauroient trop employer le secours.

I.

Déterminer le centre de Gravité des lignes.

Fig. 31. 103. Soit d'abord une ligne droite AB homogene dans toute sa longueur, & par conséquent uniformément pesante. Il est aisé de voir que sa pesanteur totale résulte de celle de chacun de ses éléments. Soit donc Mm un de ces éléments infiniment petits, soit A le point auquel on rapporte les moments; $AM = x$, $Mm = dx$.

Cela posé, vous trouverez la distance du point A au centre de gravité, en divisant la somme des moments de tous les petits poids Mm, par la somme de ces mêmes petits poids. Vous aurez donc $AG = \frac{\int x\,dx}{\int dx}$. Or $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$, & $\int dx = x$, sans constante, puisque ces deux intégrales s'évanouissent en faisant $x = 0$; donc $\frac{\int x\,dx}{\int dx} = \frac{x}{2}$, & faisant $x = AB$, afin d'avoir le centre de gravité de la ligne entiere AB, on aura $AG = \frac{AB}{2}$; dernier résultat qui nous apprendroit, si on ne le voyoit pas évidemment d'ailleurs, que *le centre de gravité d'une droite quelconque uniformément pesante est toujours à son milieu.*

104. Si la pesanteur de cette ligne n'étoit pas uniforme, son centre de gravité ne se trouveroit plus au milieu. Pour fixer alors le point qu'il doit occuper, soit en général représentée par X la densité de cette ligne en un point quelconque

conque M, X étant une fonction de x : vous aurez $AG = \frac{\int Xx\,dx}{\int X\,dx}$; & si la densité au point M est comme la distance AM, vous trouverez $AG = \frac{\int x\,x\,dx}{\int x\,dx} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}AB$; donc alors le centre de gravité seroit aux deux tiers de la ligne, en comptant du point fixe A.

II.

Déterminer le céntre de gravité du Périmetre des Polygones.

105. Le périmetre d'un Polygone étant formé par l'assemblage de plusieurs lignes droites, il n'est pas difficile d'en connoître le centre de gravité. Supposons en effet les quatre lignes Mm, Nn, Pp, Qq disposées comme on voudra. Leurs centres particuliers de gravité seront au milieu de chacune, en a, b, c, f ; & ces quatre points pourront être regardés comme étant chargés chacun du poids entier de sa ligne. Fig. 22.

Or nous trouverons (97) leur centre commun de gravité, en imaginant dans un même plan deux droites Aa', Aa'' perpendiculaires entr'elles, sur lesquelles on menera des perpendiculaires de chaque point pesant, ce qui nous donnera,

$$GG' = \frac{Mm.aa' + Nn.bb' + Pp.cc' + Qq.ff'}{Mm + Nn + Pp + Qq}$$

$$GG'' = \frac{Mm.aa'' + Nn.bb'' + Pp.cc'' + Qq.ff''}{Mm + Nn + Pp + Qq}$$

& avec ces deux distances, nous connoîtrons dans tous les cas semblables le centre de centre de gravité G, pour un nombre quelconque de lignes uniformément pesantes.

I

Les mêmes formules appliquées aux polygones réguliers, donneroient le centre de gravité de leur contour, au même point que leur centre de figure ; ce qui ne peut souffrir aucune difficulté.

III.

Déterminer le centre de gravité d'une Courbe quelconque.

FIG. 23. 106. Soit la courbe AMB dont on demande le centre de gravité. Nous supposerons à l'ordinaire, $CP = x$, $PM = y$, $Mm = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, & nous aurons $y\,ds$ pour l'expression du moment de Mm, pris par rapport à l'axe CP; $x\,ds$ sera son moment rapporté à l'autre axe CQ : donc le centre de gravité G de la courbe AMB sera déterminé par les deux formules $GG' = \frac{\int y\,ds}{s}$, $GG'' = \frac{\int x\,ds}{s}$, dans lesquelles on doit prendre les intégrales depuis A jusqu'en B.

FIG. 24. 107. Si la courbe a deux arcs égaux & semblables AB, AB', il est évident que leur centre de gravité doit être sur l'axe CP. Il faut donc alors calculer la distance $CG = \frac{\int x\,ds}{s} = \frac{\int x\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\int \sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

FIG. 23. 108. La formule $GG' = \frac{\int y\,ds}{s}$, ayant fait connoître la distance du centre de gravité de la courbe AMB à la ligne des abscisses CP, il est aisé d'en déduire une méthode différente de celle que donne la Géométrie, pour évaluer les surfaces courbes des solides de révolution. Car appellant c la

circonférence dont le diametre est 1, c'est-à-dire, faisant $c = 3,141$, &c, on fait que $2cfyds$ est la formule générale de ces sortes de surfaces. Elle exprime donc la surface courbe engendrée par la révolution de AMB autour de l'axe CP : ainsi puisqu'on a d'ailleurs $2c.GG' = \frac{2cfyds}{s}$, on en conclura $2cfyds = s.2c.GG'$ = le produit de la ligne génératrice AMB, par la circonférence que décrit son centre de gravité.

109. On peut généraliser ce résultat, & en conclure que *si tant de lignes qu'on voudra, droites ou courbes, tournent autour d'un axe quelconque, la quantité de surface engendrée par cette révolution sera toujours égale au produit de la somme des lignes génératrices, par la circonférence que décrit leur centre commun de gravité, pourvû que toutes ces lignes soient situées du même côté de l'axe de révolution.* Car s'il y en avoit quelques-unes de l'autre côté, il faudroit retrancher la somme des surfaces qu'elles produisent en tournant, de la somme des surfaces engendrées par la révolution des autres lignes.

110. Delà suit une méthode bien simple pour trouver le centre de gravité d'un systême quelconque de lignes. En effet la distance de ce centre à une droite prise à volonté, se trouvera en faisant tourner le systême autour de cette droite, & en divisant la somme des surfaces engendrées, par la circonférence qui auroit pour rayon la somme de toutes ces lignes.

Et réciproquement; si on connoît d'ailleurs le centre de

gravité d'un fyſtême de lignes, on aura très-aiſément la ſurface du ſolide décrit par leur révolution autour d'une droite quelconque, en multipliant la ſomme des lignes génératrices par la circonférence que décrit leur centre commun de gravité.

111. Donc ſi un polygone quelconque ſymmétrique ou
Fig. 25. régulier, *abfhk*, tourne autour d'une droite quelconque *AB*, la ſurface du ſolide engendré par cette révolution ſera égale au produit du contour du poligone par la circonférence dont le rayon eſt la perpendiculaire GG' menée du centre du polygone ſur l'axe *AB*.

Donc auſſi la révolution d'un cercle ou d'une ellipſe quel-
Fig. 26. conque *ACE*, autour de ſa tangente au point *A*, engendrera une ſurface égale au produit du contour de la figure, par la circonférence que décrit le rayon *AC*. Si le ſolide de révolution eſt engendré par un cercle, alors ſa ſurface ſera la même que celle d'un quarré qui auroit pour côté la circonférence de ce cercle.

Fig. 27 & 28. En général, ſi une figure quelconque *abdc* compoſée de deux ou de quatre parties égales & ſemblables, *ab*, *ac*, *cd*, *bd*, tourne autour d'un axe quelconque *AB*, la ſurface du ſolide qui en réſultera, ſera égale au contour *abdc* multiplié par la circonférence dont le rayon eſt GG', & dont la longueur eſt $2c.GG'$.

Enfin, ſi autour d'un point quelconque *C* ſont diſpoſées d'une maniere ſymmétrique, autant de figures que l'on
Fig. 29. voudra a, a'; b, b'; e, e', la ſurface du ſolide engendré par la

révolution du syſtême entier autour d'un axe AB, ſera égale à la ſomme des contours de toutes ces figures, multipliée par $circ . CC' = 2c . CC'$.

Les différentes propoſitions que nous venons d'énoncer, pourroient être démontrées directement par les ſeuls principes de la Géométrie : mais il s'en faut bien que cette maniere de les déduire, ait toute l'élégance de la méthode fondée ſur la théorie des centres de gravité.

Applications.

112. On demande le centre de gravité G du contour d'un triangle ABC? ... Cherchez d'abord la diſtance de ce centre au côté AC, en faiſant tourner le triangle autour de ce côté, & en diviſant la ſurface qu'il engendrera, par la circonférence dont le rayon ſeroit égal au contour du triangle. Vous trouverez que AB décrit un cône qui a pour ſurface $AB . \frac{1}{2} circ . BD$, pendant que BC décrit un autre cône dont la ſurface eſt $BC . \frac{1}{2} circ\ BD$; donc FIG. 30.

$$GG' = \frac{(AB+BC)\frac{1}{2} circ\ BD}{circ\,(AB+BC+AC)} = \frac{\frac{1}{2}(AB+BC)BD}{AB+BC+AC}.$$

Le principe des moments eût donné immédiatement ce réſultat, puiſque le moment du côté AB eſt $\frac{1}{2} AB . BD$, & que celui du côté BC eſt $\frac{1}{2} BC . BD$.

Cherchez enſuite par une conſtruction géométrique le point G, & pour cela, ſoit E le milieu de la perpendiculaire BD, & ſoit menée à la diſtance GG' une droite GF parallele à la baſe AC. Vous aurez $EF = \frac{1}{2} BD - GG' = \frac{\frac{1}{2} BD . AC}{AB+BC+AC}$: c'eſt-à-dire, qu'en diviſant la ſurface du trian-

gle proposé par son périmetre, vous aurez la distance EF, & que par conséquent le point F sera déterminé. C'est toujours par ce point que doit passer la ligne FG parallele à la base AC.

Cherchez enfin par le même procédé la parallele KG au côté BC, & son intersection avec FG vous fera connoître le point G, centre de gravité du contour triangulaire ABC.

113. Il est vrai qu'on eût pu déterminer ce centre d'une maniere plus facile, & aussi générale. Car soit a le milieu du côté AC, soit b le milieu de BC, & soient GG', GG'' deux perpendiculaires menées du centre G que l'on suppose connu, sur les côtés AC, BC. Cela posé, le problême sera résolu, si on connoît aG' & bG''. Or pour les connoître, faites ces deux proportions,

$$4AC : AB + BC - AC :: AB - BC : aG'.$$
$$4BC : AB + AC - BC :: AB - AC : bG''.$$

Fig. 31. 114. Cherchons maintenant le centre de gravité G d'un arc circulaire AM... Sa distance GG' au rayon AC se trouvera en divisant la surface de la calotte sphérique que décrit l'arc AM dans sa révolution autour de AP, par la circonférence qui a pour rayon la longueur de cet arc. On aura donc d'abord $GG' = \frac{AP \,.\, circ\, AC}{circ\, AM} = \frac{AP \,.\, AC}{AM}$.

Puis, en le faisant tourner autour de l'axe perpendiculaire BC, on aura $CG' = \frac{CQ \,.\, circ\, AC}{circ\, AM} = \frac{PM \,.\, AC}{AM}$; & on fera les deux proportions suivantes.

La longueur de l'arc AM est à son sinus verse AP, comme le rayon est à la distance GG', du centre de gravité au rayon AC.

La longueur de l'arc AM eſt à ſon ſinus droit PM, comme le rayon eſt à la diſtance CG', du centre de gravité à l'axe BC.

Il ſuffira cependant de calculer l'une de ces deux diſtances : parce qu'on voit bien que le centre de gravité doit être ſur un rayon CG qui diviſe en deux parties égales l'arc AM : & c'eſt auſſi ce que font voir les valeurs précédentes ; car elles donnent $\frac{GG'}{CG'} = \frac{AP}{PM}$; donc les triangles CGG' & APM ſont ſemblables, & l'angle $AMP = GCG' = \frac{1}{2} ACM$.

Quand on aura donc à déterminer le centre de gravité G' d'un arc MAM, on tirera un rayon CA par le milieu A ; & on prendra ſur ce rayon, une partie $CG' = \frac{AC.MPM}{MAM}$, c'eſt-à-dire, une quatrieme proportionnelle à l'arc, à ſa co.de, & au rayon.

D'où il ſuit réciproquement que ſi on avoit d'une maniere exacte & rigoureuſe le centre de gravité d'un arc de cercle, on auroit auſſi-tôt la rectification de cet arc.

115. Soit à préſent un arc parabolique MAM diviſé en deux parties égales au ſommet A, & ſoit le parametre $= 1$. On aura donc $yy = x$, & $AG = \frac{\int yy\,dy\sqrt{1+4yy}}{\int dy\sqrt{1+4yy}}$ (107) $= \frac{\frac{1}{16}y(1+4yy)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}\int dy\sqrt{1+4yy}}{\int dy\sqrt{1+4yy}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{y(1+4yy)^{\frac{3}{2}}}{AM} - \frac{1}{16}$: enſorte que menant la tangente MT & la normale MN, on aura Fig. 32.

$$AG = \frac{1}{16} \cdot \frac{MT^3}{PM^2 . AM} - \frac{1}{16} = \frac{NT.MT}{8AM} - \frac{1}{16}.$$

Reſte donc à prendre une quatrieme proportionnelle à $8AM$, NT & MT, dont on retranchera le ſeizieme du para-

metre, afin d'avoir la diſtance AG du centre de gravité G au ſommet A.

Fig. 33. 116. Soit enfin propoſé d'aſſigner le centre de gravité de l'arc cycloïdal MAM, dont le cercle générateur ait pour diametre $AB = a$. On aura par la nature de cette courbe, $AM^2 = s^2 = 4ax$; & par conſéquent

$$AG = \frac{\int x\,ds}{s} = \frac{\int s^2 ds}{4as} = \frac{s^3}{12as} = \frac{s^2}{12a} = \frac{4ax}{12a} = \frac{1}{3}x.$$

Le centre de gravité G eſt donc au tiers de l'abſciſſe AP, & celui de toute la cycloïde ſe trouve au tiers du diametre AB.

Remarque.

117. Si les lignes dont on cherche le centre de gravité ſont de nature différente, ou ne peuvent être exprimées par la même équation, alors il faut chercher le centre de gravité particulier de chacune, & après l'avoir trouvé on le conſidérera comme un point chargé de tout le poids de ſa ligne. Ces centres combinés entr'eux donneront le centre commun que l'on cherche. Voici un exemple.

Fig. 34. 118. Etant donné un arc MAM & ſa corde MM, trouver leur centre commun de gravité... Cherchez d'abord le centre de gravité G de l'arc MAM par la diſtance $CG = \frac{CA \,.\, MPM}{MAM}$; & puiſque P eſt le centre de gravité de la corde MM, regardez G & P comme chargés des poids MAM, MPM. Enſuite calculez la diſtance $CG' = \frac{CG \,.\, MAM + CP \,.\, MPM}{MAM + MPM}$, ou faites la proportion ſuivante qui vous donnera ſa valeur

MAM

$$MAM + MPM : MPM :: CA + CP : CG',$$

puiſque $CG . MAM = CA . MPM$; & vous connoîtrez le centre cherché G'. La méthode générale (110) vous donneroit le même réſultat. Paſſons aux centres de gravité des ſurfaces planes.

IV.

Déterminer le centre de gravité d'une Surface plane.

119. Soit BM une courbe quelconque rapportée à l'axe AP : ſoit $MPpm$ l'élément de la ſurface du trapeze $BCPM$. Le centre de gravité R de cet élément eſt en même temps ſon centre de figure, & on peut le conſidérer comme chargé de tout ſon poids ydx. Ainſi les moments de ce petit rectangle, pris par rapport aux axes perpendiculaires AP, AQ feront $ydx . RR'$, & $ydx . RR''$. Or $RR' = \frac{1}{2}y$, & $RR'' = x$: donc $GG' = \frac{\frac{1}{2}\int yydx}{\int ydx}$, & $AG' = \frac{\int xydx}{\int ydx}$, où il faut avoir ſoin de prendre les intégrales depuis B juſqu'en M, l'origine des abſciſſes étant en A. Fig. 35.

120. Si on imagine que la figure $BCPM$ faſſe une révolution autour de l'axe AP, le ſolide engendré aura pour meſure $c\int yydx$; & puiſqu'on a par la valeur de GG', $2c . GG' . \int ydx = c\int yydx$, on en doit conclure que le ſolide formé par la révolution de l'eſpace $BCPM$ autour de l'axe AP eſt égal à un priſme droit qui auroit pour baſe cette ſurface, & pour hauteur la circonférence décrite par ſon centre de gravité.

121. Or la même propriété a lieu quelle que soit la figure génératrice, & quel que soit son éloignement de l'axe. Supposons en effet une figure quelconque BCD rapportée à un axe AP, & menons une ordonnée PMM' qui coupe en M & en M' les parties inférieure & supérieure du contour de cette figure. Soit $AP = x$, $PM = y$, $PM' = y'$: nous aurons $(y' - y)\,dx$ pour l'élément de l'espace $BM'M$, $\frac{y'+y}{2}$ pour la distance de son centre de gravité à l'axe AP, & $\frac{(y'+y)\,(y'-y)}{2}\,dx = \frac{y'y'-yy}{2}\,dx$ pour son moment rapporté au même axe ; d'où nous conclurons $GG' = \frac{\int (y'y'-yy)\,dx}{2\,BCD}$, ou $2c\,.\,GG'\,.\,BCD = c\int y'y'dx - c\int yy\,dx$. Or il est clair que $c\int y'y'd\,x$ est l'expression du solide engendré par la révolution de la partie supérieure BCD du contour de la figure, & que $c\int yy\,dx$ donne également le solide engendré par la révolution de la partie inférieure BMD. La différence de ces deux solides sera donc la valeur de celui que la figure BCD engendre dans sa révolution autour de l'axe AP.

Fig. 36.

122. Au reste, quelque soit le nombre des figures génératrices, cette méthode trouvera toujours son application. Car d'un côté, chaque figure multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité, donne pour produit le solide qu'elle engendre dans sa révolution ; & de l'autre côté, la somme des produits de chaque figure par la circonférence que décrit son centre particulier de gravité est égale à la somme des figures multipliée par la circonférence que décrit leur centre commun de gravité, puisque

les circonférences ſont proportionnelles aux rayons, & que la ſomme des produits de chaque figure par la diſtance de ſon centre de gravité à l'axe, eſt égale à la ſomme des figures multipliée par la diſtance du centre de gravité de leur ſyſtême au même axe. Donc le produit total donnera la ſomme des ſolides engendrés par la révolution de chaque figure. On doit donc regarder comme général le Théorême ſuivant.

123. *Toutes les fois qu'une ou pluſieurs figures quelconques, ſituées dans le même plan, tournent autour d'un axe pris à volonté dans ce plan, la ſomme des ſolides qu'elles engendrent par leur révolution, eſt égale à la ſomme de toutes ces figures, multipliee par la circonférence que décrit le centre de gravité de tout le ſyſtême.*

Obſervez cependant que ſi toutes les figures génératrices n'étoient pas du même côté de l'axe, il faudroit ſouſtraire la ſomme des ſolides produits par les figures qui ſont d'un côté, de la ſomme des ſolides engendrés par les figures ſituées de l'autre côté.

Ce Théorême & celui que nous avons démontré auparavant (109) ſont d'un grand uſage en Méchanique. On les connoît généralement ſous la dénomination des *Théorêmes du P. Guldin*, qui les publia le premier dans un ouvrage intitulé *Centrobaryca*.

124. Par le dernier Théorême, on peut donc meſurer la ſolidité de tout ſolide engendré par la révolution d'une figure ſymmétrique quelconque, comme on a déja meſuré,

par le premier théorême, les ſurfaces courbes des mêmes ſolides.

Donc 1°, ſi le polygone ſymmétrique de la figure 25 tourne autour d'un axe quelconque AB, le ſolide engendré aura pour meſure le produit de la ſurface génératrice pour la circonférence qui a pour rayon GG'.

Fig. 25.

2°, Si le cercle ACE tourne autour de ſa tangente AB; le ſolide engendré aura pour meſure la ſurface de ce cercle, multipliée par ſa circonférence. Son expreſſion ſera donc $2a^3c^2$, en appellant a ſon rayon.

Fig. 26.

3°, Si une ellipſe, ou toute autre figure compoſée de deux ou de quatre parties égales, ſemblables & ſymmétriquement placées par rapport à un point G, tourne autour d'une ligne quelconque AB, le ſolide qui en réſultera, ſera égal à un priſme droit qui auroit pour baſe la figure génératrice, & dont la hauteur égaleroit la circonférence décrite par la révolution du centre G.

Fig. 27. & 28.

4°, En général, s'il y a par rapport à un point C tant de figures que l'on voudra, égales, ſemblables, & diſtribuées ſymmétriquement autour de ce point, le ſolide engendré par la révolution de tout le ſyſtême autour d'un axe quelconque, aura pour meſure la ſomme de toutes les ſurfaces génératrices, multipliées par la circonférence dont le rayon eſt CC'.

Fig. 27.

125. Réciproquement, lorſqu'il s'agira de trouver le centre de gravité d'un eſpace quelconque, on fera tourner cet eſpace autour d'un axe déterminé à volonté, & le

ſolide qu'il engendrera, étant diviſé par la ſurface génératrice & par $2c$, on aura pour quotient la diſtance du centre de gravité à l'axe de rotation. Prenant donc une autre de ces diſtances à un ſecond axe pris auſſi à volonté, le centre de gravité ſe trouvera déterminé.

Il y a cependant un petit inconvénient dans l'application de cette méthode ; c'eſt que pour s'en ſervir avec avantage, il faut connoître d'ailleurs la meſure de ces ſolides : ſans quoi il faudroit avoir recours aux formules générales (119). Voici quelques applications qui répandront un nouveau jour ſur toute cette matiere.

EXEMPLE I.

126. On demande le centre de gravité d'un trapeze quelconque $ABMP$, celui d'un triangle & celui de toute autre figure rectiligne. FIG. 37.

La Géométrie nous a déja appris que le cône tronqué décrit par la révolution de ce trapeze autour de l'axe AP a pour valeur $\frac{c}{3} AP(AB^2 + AB.MP + MP^2)$, & que la ſurface du trapeze eſt exprimée par $\frac{1}{2} AP(AB + MP)$. Donc la diſtance $GG' = AG'' = \frac{\frac{c}{3} AP(AB^2 + AB.MP + MP^2)}{2c.\frac{1}{2} AP(AB + MP)}$ $= \frac{1}{3} . \frac{AB^2 + AB.MP + MP^2}{AB + MP} = \frac{1}{3} AB + \frac{1}{3} . \frac{MP^2}{AB + MP}$: enſorte que cette valeur eſt abſolument indépendante de la ligne AP.

Pareillement, le cône droit décrit par la révolution du triangle BQM autour de l'axe AQ, a pour meſure $\frac{1}{3} BQ . c . QM^2$, ou ce qui eſt la même choſe, $\frac{1}{3} c . AP^2 (MP - AB)$; pendant que la ſolidité du cylindre décrit par la révolution

du rectangle $APMQ$ autour du même axe AQ a pour mesure $c \cdot AP^2 \cdot MP$: donc le solide engendré par la révolution du trapeze $ABMP$ est exprimée par $c \cdot AP^2 (\frac{2}{3}MP + \frac{1}{3}AB)$: donc la distance $GG'' = AG' = \frac{\frac{1}{3}c \cdot AP^2 (AB + 2MP)}{2c \cdot \frac{1}{2}AP (AB + MP)} = \frac{1}{3}AP \cdot \frac{AB + 2MP}{AB + MP} = \frac{2}{3}AP - \frac{1}{3} \cdot \frac{AP \cdot AB}{AB + MP}$.

Or il est aisé de voir que ces formules ont lieu quelque soit l'angle fait sur les paralleles AB, MP, par la sécante AP, pourvu qu'on ait toujours soin de prendre GG' & GG'' respectivement paralleles à AQ & à AB. On aura donc, par le moyen de ces deux formules, le centre de gravité d'un trapeze quelconque.

Fig. 38. 127. Et delà, si on fait $AB = 0$, le trapeze se changera en un triangle AMP, dont le centre de gravité G sera bientôt déterminé en prenant $AG' = \frac{2}{3}AP$, & en menant $G'G = \frac{1}{3}MP$, parallele à MP.

Mais si par le centre G ainsi déterminé & par le point A vous imaginez une droite AGF, vous aurez $AG' : AP$ ou $2 : 3 :: AG : AF :: GG' : FP$; donc $FG = \frac{1}{3}AF$, & $FP = \frac{1}{2}MP$; ce qui vous donnera une construction fort simple, pour déterminer le centre de gravité d'un triangle quelconque AMP. Pour cet effet, menez la droite AF du sommet A, au milieu F du côté opposé, & prenez sur cette ligne, une portion FG qui en soit le tiers. G sera le centre cherché.

128. Il eût été facile de trouver la même construction d'une maniere encore plus simple, qui ne suppose point du

tout le calcul précédent. Car puiſque la droite AF menée du point A au milieu F du côté oppoſé MP, diviſe en deux parties égales toutes les paralleles à MP, elle paſſe donc par tous leurs centres particuliers de gravité. Menant donc du ſommet M une droite MH au milieu H du côté oppoſé AP, cette ſeconde ligne paſſera de même par tous les centres particuliers de gravité des paralleles au côté AP. Elle paſſera donc néceſſairement par le centre de gravité du triangle, ainſi que la premiere droite AF. Ce centre ſe trouvera donc au point de leur interſection. Mais pour en déduire la valeur de FG, menez la droite HF; elle ſera parallele au troiſieme côté AM, & vous aurez $PH : PA$, ou $1 : 2 :: HF : AM :: GF : AG$; donc $FG = \frac{1}{3} AF$. Fig. 39.

129. Quoi de plus aiſé maintenant que de trouver le centre de gravité d'un figure quelconque rectiligne ? On la diviſera d'abord en triangles, dont on déterminera ſéparément les centres de gravité : puis on cherchera le centre commun de gravité de tous ces triangles, & ce centre ſera celui de la figure propoſée.

EXEMPLE II.

130. On demande le centre de gravité d'un demi-ſegment circulaire AMP, celui d'un ſegment entier, & celui d'un ſecteur. Fig. 40.

Soit $AP = x$, $PM = y$, $AC = a$; & nous aurons $yy = 2ax - xx$, & $\int yydx = \int (2axdx - xxdx) = ax^2 - \frac{1}{3}x^3$. Donc $GG' = \frac{(a - \frac{1}{3}x)\frac{1}{2}x^2}{AMP}$.

Pareillement $\int xy\,dx = \int \left(\overline{x-a}\,.\,dx\sqrt{2ax-xx} + a\,dx\sqrt{2ax-xx}\right) = -\frac{1}{3}(2ax-xx)^{\frac{3}{2}} + a\,.\,AMP$; donc $AG' = \frac{a\,.\,AMP - \frac{1}{3}PM^3}{AMP}$, ou $CG' = \frac{1}{3}\,.\,\frac{PM^3}{AMP}$.

Le réſultat ſeroit le même, ſans avoir beſoin de ces intégrations, ſi après avoir fait tourner ſucceſſivement le demi-ſegment AMP autour des axes CA & CB, on meſuroit les portions de ſphere qui en ſeroient provenues.

131. Maintenant, pour avoir le centre de gravité de tout le ſegment $MAMPM$, il ne faudra plus que la diſtance $CG' = \frac{\frac{1}{3}PM^3}{AMP}$, dont la valeur calculée pour le demi-cercle BAB donnera $\frac{4}{3}\,.\,\frac{a}{c}$, ce qui revient à très-peu près à $\frac{14}{33}a$.

Fig. 40. 132. Reſte à trouver le centre de gravité du ſecteur $MAMC$; & voici trois manieres différentes d'y parvenir : 1°, on peut le décompoſer en deux parties dont l'une ſera le ſegment $MAMPM$, l'autre ſera le triangle MCM. La premiere a ſon centre de gravité en G', la ſeconde en G'''; donc le ſecteur doit avoir le ſien dans un point r, tel que l'on ait

$$(MAMPM + MCM)Cr = CG'\,.\,MAMPM + CG'''\,.\,MCM =$$
$$\tfrac{2}{3}PM^3 + \tfrac{2}{3}CP\,.\,CP\,.\,PM = \tfrac{2}{3}PM(CP^2 + PM^2) = \tfrac{2}{3}PM\,.\,CM^2 ;$$

donc $Cr = \frac{\frac{2}{3}PM\,.\,CM^2}{AM\,.\,CM} = \frac{2}{3}\,.\,\frac{MM\,.\,CM}{MAM}$; ce qui donne la proportion ſuivante pour déterminer dans tous les cas le centre de gravité d'un ſecteur circulaire.

L'arc MAM eſt à ſa corde MM, comme les deux tiers

tiers du rayon ſont à la diſtance du centre du cercle au centre de gravité du ſecteur.

2°, On peut ſe repréſenter le ſecteur, comme formé par des triangles infiniment petits CNn qui ont tous leur ſommet au centre du cercle, & dont les centres particuliers de gravité ſont rangés de ſuite ſur un arc BED décrit du rayon $CB = \frac{2}{3} CM$: or le centre de gravité de l'arc BED ſe trouve (114) en prenant FIG. 41.

$$CG = \frac{CB \cdot BFD}{BED} = \frac{2}{3} \frac{CM \cdot MM}{MAM}.$$

3°, On peut encore ſuppoſer que le ſecteur $CMAM$ tourne autour de l'axe CK perpendiculaire à CA : & alors le ſolide engendré ſera une eſpece de ſecteur ſphérique qui aura pour meſure la ſurface engendrée $MM \cdot circAC$ multipliée par le tiers du rayon. On aura donc (125)

$$CG = \frac{MM \cdot 2c \cdot AC \cdot \frac{1}{2} AC}{2c \cdot MAM \cdot \frac{1}{3} CM} = \frac{3}{2} \cdot \frac{CM \cdot MM}{MAM}.$$

EXEMPLE III.

133. SOIT une parabole AM d'un ordre quelconque qui ait pour équation $x = y^m$. On aura $dx = my^{m-1}dy$, $\int y\,dx = \int my^m dy = \frac{m}{m+1} y^{m+1}$; donc FIG. 42.

$$GG' = \frac{\frac{1}{2}\int yy\,dx}{\int y\,dx} = \frac{\frac{m}{m+2} y^{m+2}}{\frac{2m}{m+1} y^{m+1}} = \frac{m+1}{2m+4} \cdot PM.$$

$$GG'' = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx} = \frac{\frac{m}{2m+1} y^{2m+1}}{\frac{m}{m+1} y^{m+1}} = \frac{m+1}{2m+1} \cdot AP.$$

Formules qui pour la parabole ordinaire donnent $GG' = \frac{3}{8} MP$,

& $GG'' = \frac{1}{3} AP$. Son centre de gravité sera donc toujours aisé à connoître.

Exemple IV.

Fig. 43. 134. Si on avoit à trouver celui d'un segment elliptique $AMPM$, on pourroit rapporter les moments au second axe, & faisant $CP = x$, $PM = y$, $CA = a$, $CB = b$, on trouveroit $CG = \frac{\int -yxdx}{\int -ydx}$. Or $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$; donc $xdx = -\frac{aa}{bb} ydy$, & $\int -yxdx = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{b^2} y^3$; donc

$$CG = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot PM^3}{MAMPM} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{a^3}{b^3} PM^3}{\frac{a}{b} MAMPM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{PN^3}{NANPN}.$$

Ce centre est donc le même que celui du segment circulaire $NANPN$. Il en est de même du centre de gravité du secteur elliptique $CMAMC$, comparé au secteur circulaire $CNANC$, dont l'arc est toujours déterminé par le prolongement de MM.

V.

Déterminer le centre de gravité des Surfaces courbes.

135. Il ne peut y avoir de difficulté dans cette recherche, quand il s'agit de la surface latérale d'un prisme : car on voit bien que le centre de gravité de ces sortes de surfaces doit nécessairement se trouver au milieu de la ligne que décrit le centre de gravité de la base pendant la génération du prisme. Passons donc aux surfaces des solides de révolution.

Fig. 44. 136. Soit une surface courbe produite par la révo-

lution de l'arc MB autour de l'axe AP. Il eſt évident que ſon centre de gravité G doit être dans cet axe, & que ſi on connoiſſoit ſa diſtance à l'origine des abſciſſes que nous ſuppoſerons en A, par exemple, ce centre ſeroit entiérement déterminé.

Or l'élément Mm décrit la ſurface d'un cône tronqué, laquelle a pour meſure $2cyds$, & qui a ſon centre de gravité au point r, milieu de Pp. Ce point eſt en quelque ſorte chargé ſeul du poids de la ſurface $2cyds$: ſon moment pris par rapport à l'origine A des abſciſſes, eſt $2cxyds$: donc, la formule $AG = \frac{\int xyds}{\int yds}$ fera toujours connoître les centres de gravité des ſurfaces courbes.

Exemple I.

On demande le centre de gravité de la ſurface courbe d'un cône droit quelconque MAM? Fig. 45.

Soit $AP = x$, $PM = y$, & l'angle $MAP = a$. Vous aurez d'abord $y = x \, tang \, a$, & $ds = \frac{dx}{cof \, a}$: puis $AG = \frac{\int xxdx}{\int xdx}$; d'où vous tirerez $AG = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}AP$. Ce centre de gravité eſt donc le même que celui du triangle MAM.

Il eût été tout auſſi facile de parvenir au même réſultat, en imaginant la ſurface convexe du cône, partagée en une infinité de petits triangles égaux & ſemblables MAm, dont les centres de gravité particuliers ſe trouvent tous à une circonférence décrite du pole A & du rayon $AD = \frac{2}{3}AM$. Car le centre de gravité de cette circonférence eſt en G, à la diſtance $AG = \frac{2}{3}AP$, comme il eſt évident.

EXEMPLE II.

FIG. 44. ON demande où eſt le centre de gravité de la ſurface d'une calotte ſphérique, & en général, d'une zone quelconque ?

Soit a le rayon de la ſphere, ſoit B l'origine des abſciſſes. On aura $y\,ds = a\,dx$, & par conſéquent $BG = \frac{\int x\,dx}{\int dx} = \frac{1}{2}x$; ce qui donne généralement le centre de gravité d'une calotte, ou d'une zone ſphérique quelconque, au milieu de ſon épaiſſeur.

EXEMPLE III.

SI BM eſt un arc de parabole, dont le ſommet B ſoit l'origine des abſciſſes, & dont l'équation ſoit $yy = x$, on trouvera le centre de gravité de la ſurface convexe du paraboloïde, par la formule ſuivante

$$BG = \frac{\int y^3 dy \sqrt{(1+4yy)}}{\int y\,dy \sqrt{(1+4yy)}} = \frac{\frac{1}{5}[(1+4yy)^{\frac{5}{2}} - 1] - \frac{1}{3}[(1+4yy)^{\frac{3}{2}} - 1]}{4 \cdot \frac{1}{3}[(1+4yy)^{\frac{3}{2}} - 1]}$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{yy(1+4yy)^{\frac{3}{2}}}{(1+4yy)^{\frac{3}{2}} - 1} - \frac{1}{10}.$$

VI.

Déterminer le centre de gravité d'un ſolide quelconque.

137. CONCEVEZ ce ſolide partagé en tranches infiniment minces & paralleles à un plan que vous prendrez à volonté. Nommez T l'une quelconque de ces coupes, & x ſa diſtance au plan que vous aurez pris ; alors $T\,dx$ exprimera la ſolidité d'une tranche quelconque, & $x\,T\,dx$ exprimera ſon moment : donc la diſtance du centre de gravité au plan en queſtion ſera généralement exprimée par la formule $\frac{\int T x\,dx}{\int T\,dx}$,

dans laquelle $\int T\,dx$ eſt la même choſe que le volume du ſolide. Répétez ce procédé par rapport à deux autres plans perpendiculaires entr'eux & au premier, vous aurez leurs trois diſtances au centre de gravité, & ce centre par conſéquent ſera déterminé.

Exemple I.

138. Soit propoſé de trouver le centre de gravité des priſmes & des cylindres droits ou obliques, celui des pyramides, des cônes, & généralement celui de tous les polyedres.

1°, Les tranches des priſmes & des cylindres étant toutes paralleles & égales, il eſt clair que leur centre commun de gravité doit ſe trouver au milieu de la ligne droite qui paſſe par les centres de gravité particuliers des deux baſes. Ce premier cas n'a donc aucune difficulté.

2°, L'autre n'eſt guere moins facile. Car tous les corps engendrés à la maniere des pyramides, peuvent être partagés en coupes ſemblables & paralleles à la baſe : & alors la droite AD menée par le centre de gravité D de cette baſe, doit évidemment paſſer par le centre de gravité de chacune de ces coupes, & par celui du ſolide. Fig. 46.

Donc pour connoître la diſtance AG, concevez d'abord le poids de chaque tranche réuni en un point D ſur la même droite AD que vous appellerez x. Remarquez enſuite que toutes ces coupes ſont proportionnelles aux quarrés de leurs diſtances reſpectives du point A : vous aurez donc,

$$AG = \frac{\int x^3 dx}{\int x^2 dx} = \frac{\frac{1}{4}x^4}{\frac{1}{3}x^3} = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}AD.$$

Donc le centre de gravité des ſolides pyramidaux eſt toujours aux trois quarts de la diſtance AD comptée de leur ſommet, ce qui facilite beaucoup la recherche du centre de gravité de toute ſorte de polyedres.

EXEMPLE II.

139. SOIT propoſé de trouver en particulier le centre de gravité des ſolides de révolution.

Je prends un ſegment quelconque perpendiculaire à l'axe de révolution, & je dis : Le centre de gravité de ce ſegment doit néceſſairement être ſur cet axe. Or la formule des ſolides de ces ſortes de tranches eſt $cyydx$; donc la diſtance du centre de gravité à l'origine des abſciſſes ſera généralement exprimée par $\frac{\int yyxdx}{\int yydx}$.

Pour en faire une premiere application, je cherche le centre de gravité d'une calotte ſphérique quelconque ; & pour cela, j'ai d'abord $yy = 2ax - xx$, qui me donne $\int yyxdx = \frac{2}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4$. J'ai enſuite $\int yydx = ax^2 - \frac{1}{3}x^3$; donc la diſtance du centre de gravité d'une calotte ſphérique, au ſommet de cette même calotte eſt

Fig. 44.

$$BG = \frac{\frac{2}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4}{ax^2 - \frac{1}{3}x^3} = \frac{8a - 3x}{12a - 4x}x.$$

Enſorte que faiſant $x = 2a$, pour avoir le centre de gravité de la ſphere entiere, que l'on fait d'ailleurs être au centre même de figure, on auroit $BG = a$.

EXEMPLE III.

Fig. 47. ON demande le centre de gravité d'un ſecteur ſphérique quelconque $CMAB$?

Tout secteur sphérique peut être décomposé en deux parties, dont l'une est un segment sphérique AMB, l'autre est un cône droit CBM: or 1°, le segment sphérique a son centre de gravité G à la distance $AG = \frac{8a - 3x}{12a - 4x}x$, & le cône CBM a le sien G', à une distance $AG' = \frac{3x + a}{4}$. 2°, La solidité du segment a pour valeur $\frac{c}{3}(3ax^2 - x^3)$, celle du cône est $\frac{c}{3}(a - x)(2ax - xx)$, & celle du secteur $= \frac{2}{3}ca^2x$.

Donc si on prend les moments par rapport au point A, afin d'avoir le centre de gravité G'' du secteur entier, on aura

$$\frac{2}{3}ca^2x \cdot AG'' = \frac{c}{3}(3ax^2 - x^3)\left(\frac{8a - 3x}{12a - 4x}x\right) + \frac{c}{3}(a - x)(2ax - xx)\left(\frac{3x + a}{4}\right);$$

& toute réduction faite, $AG'' = \frac{2a + 3x}{8}$; ce qui donne le centre de gravité de la demi-sphere aux cinq huitiemes de son épaisseur, en comptant du sommet.

On obtient le même résultat, en concevant qu'un secteur sphérique est formé d'une infinité de petites pyramides qui toutes ont leur sommet au centre C, & dont les centres particuliers de gravité se trouvent dans une surface sphérique décrite d'un même centre C, & d'un rayon égal aux trois quarts de CM. Or le centre de gravité de cette surface est à une distance $\frac{2a + 3x}{8}$, du point A.

EXEMPLE IV.

140. Etant donné un paraboloïde, un hyperboloïde, & un ellipsoïde, trouver leurs centres de gravité.

1°, L'équation de la parabole génératrice étant $yy = x$, on a tout de suite $AG = \frac{\int x^2 dx}{\int x dx} = \frac{2}{3}AP$.

2°, Dans l'hyperbole, $yy = 2ax + xx$; donc en fubftituant dans la formule générale, on aura

FIG. 48.

$$AG = \frac{\int (2ax + xx) x dx}{\int (2ax + xx) dx} = \frac{8a + 3x}{12a + 4x} x,$$

où l'on voit qu'en prenant une très-grande abfciffe x, $AG = \frac{3}{4} x$, & qu'au contraire fi on prend x très-petite, AG devient $= \frac{2}{3} x$; enforte que AG fe trouve toujours entre les deux tiers & les trois quarts de AP.

3°, Quant au centre de gravité d'un fegment ellipfoïdal quelconque fait perpendiculairement à l'axe, il eft conftamment le même que celui du fegment correfpondant de la fphere circonfcrite. On le trouvera donc en fuivant le même procédé.

Mais fi la fection faite dans l'ellipfoïde, au lieu d'être perpendiculaire à l'axe, lui étoit inclinée d'une maniere quelconque MPN, comment déterminer alors le centre de gravité du fegment $MSNP$ qui en réfulte ?

FIG. 49.

Suppofez mené par le centre C un plan elliptique perpendiculaire au plan coupant, lequel divife le fegment propofé en deux parties égales & femblables. Suppofez encore le demi-diametre CPS mené par le point P milieu de MN.

Cela pofé, on démontre en Géométrie que la coupe MPN eft une ellipfe dont le grand axe eft MN, & qui, à la grandeur près, reffemble en tout point aux autres coupes paralleles dont les grands axes refpectifs feroient les doubles ordonnées du demi-diametre CS. Or delà, il fuit 1°, que le centre de gravité G eft fur le demi-diametre CS;

2°,

2°, qu'en faisant $SP = x$, $PM = y$, $CS = m$, la distance de ce centre au point S sera

$$SG = \frac{\int PM^2 x\, dx}{\int PM^2 dx} = \frac{\int x\, dx\, (2mx - xx)}{\int dx\, (2mx - xx)} = \frac{8m - 3x}{12m - 4x} x,$$

valeur parfaitement semblable à celle que l'on a pour le grand axe de l'ellipse génératrice.

EXEMPLE V.

[141. Étant donné un demi-cylindre droit élevé sur le demi-cercle DAB, on demande où seroit le centre de gravité d'un *Onglet* quelconque provenu de la section du cylindre, faite par un plan elliptique DBE? ★ FIG. 50.

Ce centre doit nécessairement se trouver dans un des points du plan triangulaire CEA, qui partage l'onglet en deux autres solides égaux & semblables entr'eux. Or si GG' est la perpendiculaire menée du centre de gravité G sur le rayon CA, il faudra 1°, déterminer CG'; & pour cela, nous supposerons le solide partagé en tranches paralleles au diametre DB, & perpendiculaires à la base.

Chaque coupe sera un rectangle $MPNnpm$, dont la base sera $2y$, & dont la hauteur Pp égalera $\frac{bx}{a}$, en faisant $CA = a$, $AE = b$, & $CP = x$. Maintenant si on fait à l'ordinaire $PM = y = \sqrt{aa - xx}$, on aura pour la surface d'une de ces coupes $\frac{2b}{a} xy$, pour la solidité d'une tranche quelconque, $\frac{2b}{a} xy\, dx$, & pour son moment pris par rapport à un plan perpendiculaire à la base, lequel passeroit par BD, on aura $\frac{2b}{a} x^2 y\, dx$.

Donc $CG' = \frac{\int xxy\, dx}{\int xy\, dx} = \frac{\int x^2 dx \sqrt{(aa - xx)}}{\int x\, dx \sqrt{(aa - xx)}}$.

Or $\int x^2 dx \sqrt{a^2 - x^2} = -\frac{1}{4}x(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{a^2}{4}\int dx \sqrt{a^2 - x^2} =$
$-\frac{1}{4}x(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}a^2 . CDMP.$

Donc pour le solide entier, l'intégrale sera $\frac{1}{4}a^2 . CDMAC$ ou $\frac{1}{8}a^3 . AMD$. Pareillement $\int x dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{3}[a^3 - (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}]$, & sa valeur totale $= \frac{1}{3}a^3$; d'où nous remarquerons, en passant, que la solidité de l'onglet $= \frac{2b}{a} . \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^2 b$. Donc enfin $CG' = \frac{\frac{1}{8}a^3 . AMD}{\frac{1}{3}a^3} = \frac{3}{8}AMD$, ou à peu près $\frac{41}{73}AC$.

2°, Reste à déterminer l'autre distance GG'; ce que l'on effectuera, en imaginant que le solide est partagé en tranches paralleles à sa base. Chaque coupe sera un segment $mpna$, égal à sa projection $MPNA$: appellant donc z la perpendiculaire Aa, on aura $GG' = \frac{\int MPNA . zdz}{\int MPNA . dz}$. Or $\int MPNA . dz$ est encore la solidité de l'onglet que nous avons déja trouvée $= \frac{2}{3}a^2 b$; donc puisque $z = \frac{bx}{a}$, nous aurons $\int MPNA . zdz = \frac{bb}{aa}\int MPNA . xdx = \frac{bb}{aa}(MPNA . \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} d . MPNA)$. D'ailleurs $d . MPNA = -2ydx$: donc $\int MPNA . xdx = MPNA . \frac{x^2}{2} + \int x^2 dx \sqrt{aa - xx}$ $= MPNA . \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}a^2 . CDMP$; & la valeur de cette intégrale prise pour tout le solide, donnera $\frac{1}{8}a^3 . AMD$: donc $GG' = \frac{\frac{bb}{aa} . \frac{1}{8}a^3}{\frac{2}{3}a^2 b} = \frac{3}{16} . \frac{b}{a} AMD = \frac{3}{16}$ du quart de la circonférence que décriroit le rayon EA.

De ce calcul on tire $CG' : G'G :: \frac{3}{8} : \frac{3b}{16a} :: a : \frac{b}{2}$; donc le centre de gravité G est sur la droite CGK menée du centre C au milieu K de la ligne AE : & en effet cette

droite passe par tous les centres de gravité particuliers des coupes rectangulaires *MmnN* qui forment l'onglet; elle doit donc passer aussi par leur centre commun de gravité, qui est visiblement le même que celui de l'onglet. Ainsi pour déterminer ce centre, il suffit de prendre CG' égale aux trois-huitiemes du quart de la circonférence de la base, & de mener par le point G' une perpendiculaire à cette base qui aille rencontrer en G la ligne CK.] *

REMARQUE.

142. PAR tout ce qui précede, on doit voir qu'il n'y a point de ligne, de surface, ni de solide dont le centre de gravité ne se trouve, toutes les fois qu'on a leur équation. Il n'en est pas de même, lorsqu'un solide, par exemple, est tellement irrégulier, qu'on ne peut calculer qu'à peu près sa solidité : car alors, il ne faut s'attendre qu'à des résultats plus ou moins approchés pour le centre de gravité.

On les obtient, ces sortes de résultats, en considérant un tel solide comme un assemblage de tranches si petites, qu'elles puissent être rapportées sans erreur sensible, soit aux solides prismatiques, soit à d'autres corps géométriques dont on connoisse le centre de gravité. Cette décomposition une fois faite, on prend à l'ordinaire la somme des moments de toutes ces tranches, par rapport à un plan déterminé, & on divise cette somme, par celle des tranches mêmes, afin d'avoir la distance du centre de gravité à ce plan.

Et si le corps n'est pas symmétrique, on répétera le même procédé, par rapport à deux autres plans perpendiculaires

entr'eux & au premier, afin de déterminer, au moins à peu près, le centre commun de gravité. Pour compenser le défaut d'exactitude dans ces sortes de résultats, il est à propos de considérer alors le centre de gravité, non plus comme un point mathématique, mais comme une petite sphere décrite du point trouvé comme centre, & d'un rayon d'autant plus petit, qu'on aura lieu de croire le calcul moins inexact.

Précis d'une autre Méthode pour déterminer les centres de gravité.

143. On trouve dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, une méthode fort simple qui donne généralement toutes les formules déja calculées pour les centres de gravité. Comme il est assez agréable de parvenir aux mêmes résultats par des routes différentes, nous indiquerons ici celle que M. Clairaut a tracée dans un petit mémoire que le Volume de 1731 contient. En voici le fondement.

Le centre commun de gravité de deux corps se trouve en divisant la ligne qui joint leurs centres particuliers de gravité, en raison inverse de leurs poids.

Ce principe une fois posé, l'Auteur considere dans une surface quelconque, un de ses éléments infiniment petits, & prenant le centre de gravité de cet élément, ce qui est toujours fort aisé, il suppose une droite menée de ce point au centre de gravité cherché. Puis il divise cette ligne en

raiſon inverſe des poids de la ſurface entiere & de ſon élément ; d'où il tire la formule des centres de gravité de toutes les ſurfaces.

EXEMPLE I.

SOIT une courbe quelconque MAM, diviſée en deux également par ſon axe AP ; il eſt clair que ſon centre de gravité doit être ſur la ligne AP : je le ſuppoſe en G. Celui de ſon élement $MmmM$ eſt au milieu de Pp : mais Pp eſt infiniment petit ; on peut donc ſuppoſer en P le centre de gravité de cet élément. Suppoſons en g le centre de gravité de la ſurface mAm, enſorte que Gg ſoit la différentielle, ou la fluxion de AG, & nous aurons, en faiſant $AG = u$, $AP = x$, $PM = y$, FIG. 51.

$Gg\,(du) : gP$ ou $GP\,(x - u) :: MmmM\,(2y\,dx) : MAM\,(2\int y\,dx)$; d'où on déduit $du\int y\,dx = xy\,dx - uy\,dx$, & $uy\,dx + du\int y\,dx = xy\,dx$, dont l'intégrale $u\int y\,dx = \int xy\,dx$, donne $u = AG = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}$ (119).

EXEMPLE II.

SOIT un eſpace quelconque APM compris entre l'abſciſſe AP, l'ordonnée PM & l'arc AM. On demande les formules de ſon centre de gravité. FIG. 52.

Suppoſons d'abord que cet eſpace varie d'une quantité infiniment petite $MmpP$; le centre de gravité O de cet élément ſera au milieu de PM. Suppoſez enſuite que l'eſpace donné APM ait ſon centre de gravité dans un point quelconque G, & menez la droite GO. Le centre cherché doit être dans un des points g de cette ligne.

Pour déterminer ce point, divisez GO de maniere que Gg soit à $gO :: MmpP : APM$; après quoi abaissant sur AP les perpendiculaires GG', gg', & menant GR parallele à AP, vous aurez $Gg : gO$ ou $GO : G'g' : G'P' :: MmpP : APM$.

Supposant donc $\left\{\begin{array}{l} AG' = u \\ GG' = t \\ AP = x \\ PM = y \end{array}\right.$ vous trouverez $\left.\begin{array}{l} G'g' = du \\ gh = dt \\ Pp = dx \\ Po = \frac{1}{2}y \end{array}\right\}$

ce qui donne pour la proportion ci-dessus,

$$Gg : GO :: du : x - u :: y\,dx : \int y\,dx;$$

d'où l'on tire également $u = AG' = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}$.

Cela posé, les triangles semblables Ggh, GOR donneront $Gh : GR :: gh : OR$, ou algébriquement

$$du : x - u :: dt : \tfrac{1}{2}y - t :: y\,dx : \int y\,dx:$$

vous aurez donc $dt \,.\int y\,dx = \frac{1}{2}yy\,dx - ty\,dx$, & $dt\,.\int y\,dx + ty\,dx = \frac{1}{2}yy\,dx$. Or l'intégrale de cette équation est $t\int y dx = \frac{1}{2}\int yy\,dx$; donc enfin $t = GG' = \frac{\frac{1}{2}\int yy\,dx}{\int y\,dx}$ (119).

Exemple III.

Fig. 53. Soit proposé de calculer les formules du centre de gravité d'un arc quelconque $AM = s$.

Prenez G pour le centre cherché, & supposez en M celui de l'élément Mm; menez MG que vous diviserez en un point g, dans le rapport de Mm à AM; puis vous tirerez des paralleles comme dans la figure précédente, & conservant les mêmes dénominations, vous aurez

$$Gh : GR :: gh : MR, \text{ ou } du : x - u :: dt : y - t$$

$$\& \; Gg : GM :: G'g' : G'P :: Mm : AM$$

$$\text{Donc} \begin{cases} du : x - u :: ds : s \\ dt : y - t :: ds : s \end{cases} \quad \text{Donc} \begin{cases} u = AG' = \frac{\int x\,ds}{s} \\ t = GG' = \frac{\int y\,ds}{s} \end{cases}$$

Formules parfaitement femblables à celles que nous avons déja trouvées (106) pour le centre de gravité des arcs. Il ne feroit pas difficile de calculer, en fuivant la même méthode, les formules qui déterminent le centre de gravité des folides.

Quelques applications de la Théorie des centres de gravité.

La théorie des centres de gravité n'eft pas de pure fpéculation, comme bien d'autres. Elle fert à expliquer beaucoup de phénomenes de la Nature, principalement ceux qui regardent la ftabilité des corps. Il ne fera donc pas inutile d'ajouter ici quelques éclairciffements qui fervent de bafe à ces applications.

144. Puifque le centre de gravité eft ce point unique où toute la pefanteur d'un corps fe réunit, & le follicite au mouvement, il eft clair que ce corps ne peut refter en repos, à moins que fon centre de gravité ne foit foutenu. Mais comme il n'eft pas poffible de le foutenir immédiatement, on ne doit s'attendre à voir le corps en équilibre, que dans le cas où fon centre de gravité fe trouve dans la verticale qui paffe par le point de foutien.

Suppofant donc qu'un folide quelconque BB foit attaché Fig. 54.

en C, ou ſoutenu en A, on voit qu'il ne peut être fixé dans ſon équilibre, à moins que CG & AG ne ſoient dans la verticale, qui paſſe par le centre de gravité G. Dans tout autre cas, le poids du corps agira, ſans que rien s'oppoſe à ſon action, de maniere à la détruire, & il en réſultera une eſpece de rotation. Mais lorſque le point de ſuſpenſion ou de ſoutien ſera verticalement oppoſé à la direction du centre de gravité, tous les efforts de ce centre ſeront anéantis, & l'équilibre aura lieu.

145. Réciproquement, toutes les fois qu'un corps quelconque ſera en équilibre, on conclura que ſon centre de gravité eſt ſoutenu ſuivant une ligne verticale. Ainſi, pour déterminer ce centre d'une maniere bien ſimple, on poſera le corps ſur une des arêtes d'un priſme triangulaire, par exemple, de façon qu'il y reſte en équilibre, & alors on marquera ſur ſa ſurface la ligne de ſon interſection avec l'arête du priſme. Puis, on le poſera ſur une autre face & dans une autre ſituation, ſur la même arête, & on cherchera pour la ſeconde fois ſon équilibre, dont on marquera la ligne comme la précédente. Ces deux lignes ſe couperont, & ſi du point de leur interſection, on imagine une perpendiculaire menée dans la profondeur du corps, cette ligne paſſant par ſon centre de gravité, marquera la direction ſuivant laquelle il faut le ſoutenir ou le ſuſpendre, pour avoir ſon équilibre.

Au défaut d'un priſme triangulaire, on peut ſe ſervir du bord d'une table, ſur lequel on place le corps de maniere qu'il

qu'il soit près de tomber, sans qu'il tombe cependant. On marque avec un crayon la ligne de contact, & on dispose ensuite le corps dans un autre sens, quoique également près de sa chûte, ce qui donne une seconde ligne qui coupe la premiere. Le reste s'entend assez.

On peut aussi suspendre le corps par un de ses points, & quand il est bien en repos, on suppose une verticale menée du point de suspension tout à travers du corps. On le suspend ensuite par un autre point, on conçoit une seconde verticale, qui va couper la premiere, & le centre de gravité se trouve toujours à leur intersection.

146. Cherchons maintenant la condition de l'équilibre pour un corps soutenu par deux de ses points. Il faut, en général, que tout l'effort de son poids soit détruit par la résistance des deux appuis. Or il ne peut être ainsi anéanti, que lorsque le centre de gravité se trouve dans le plan vertical qui passe par ces deux points : toute autre situation n'empêcheroit pas le corps de tourner autour de l'axe qui repose sur ces mêmes points. Il éprouveroit même des oscillations sans nombre autour de cet axe, si le frottement des pivots & la résistance de l'air ne le fixoient pas enfin dans la situation convenable à l'équilibre.

147. Dans cette nouvelle position, il n'est pas difficile de déterminer les charges respectives des deux appuis. Supposons en effet que *G* soit le centre de gravité d'un corps Fig. 55.
dont tout le poids est censé agir suivant la perpendiculaire *Gg*. On décomposera cette puissance en deux autres paral-

N

leles Aa, Bb qui pafferont par les appuis A & B : menant enfuite une droite quelconque agb dont les parties feront connues, on fera ces deux proportions ; ab eft au poids du corps, comme bg eft à la charge de l'appui A, comme ag eft à la charge de l'appui B.

Fig. 56. 148. S'il y avoit trois points d'appui A, B, C, non en ligne droite, le corps feroit abfolument immobile, & on pourroit alors fe fervir de la méthode fuivante, pour calculer la charge de chaque appui.

Concevez un plan ABC qui paffe par les trois points donnés, & qui rencontre en G la verticale Gg menée par le centre de gravité. Cela pofé, fi on appelle G le poids du corps, A, B, C les charges des appuis, & fi on décompofe la puiffance G en deux autres qui paffent par C & par D, on aura d'abord $DC : G :: DG : C = \frac{DG}{DC} G :: GC : D = \frac{GC}{DC} G$. Décompofant enfuite la puiffance D en deux autres qui pafferont par A & B, on aura

$$AB : \frac{GC}{DC} G :: AD : B = \frac{AD \cdot GC}{AB \cdot DC} G :: DB : A = \frac{DB \cdot GC}{AB \cdot DC} G.$$

On parviendroit au même but, en imaginant deux plans verticaux qui laiffaffent du même côté ces appuis & le centre de gravité : car alors en nommant a, b, c, g les diftances des appuis A, B, C, & du centre de gravité G, à l'un de ces deux plans, nommant de même a', b', c', g', leurs diftances à l'autre plan, on auroit ces trois équations ;

$$Aa + Bb + Cc = Gg$$
$$Aa' + Bb' + Cc' = Gg'$$
$$A + B + C = G$$

d'où l'on tireroit aisément les valeurs des charges *A*, *B*, *C*.

149. Mais si le corps est posé sur un plan horizontal, quelles sont les conditions de son équilibre ?

I°, S'il n'est appuyé sur ce plan, que par une de ses extrémités, il faut que la verticale abaissée du centre de gravité *G*, passe par le point de contact *C*. Sans cela, vous verrez le corps se renverser du côté vers lequel sera dirigée la verticale. Au lieu que si vous la supposez dirigée au point *C*, le corps doit nécessairement rester en repos, puisque le mouvement qui tend à l'entraîner suivant la verticale, est détruit par le plan, & que d'ailleurs il n'y a pas la moindre raison, pour qu'il se renverse d'un côté plutôt que d'un autre. Fig. 57.

Il est vrai que le plus petit ébranlement excité dans le plan, ou que le souffle le plus léger peut troubler cet équilibre, sur-tout si le corps a une certaine hauteur, & s'il est appuyé sur une pointe fort aiguë : mais c'est qu'alors une puissance étrangere venant se joindre à celle de la gravité, le corps est entraîné par la nouvelle résultante, ce dont il n'est pas question ici. Concluons donc que pour établir un corps en équilibre sur une de ses pointes, il faut que le centre de gravité & cette pointe soient dans une même verticale.

II°, S'il s'agit d'obtenir cet équilibre dans le cas où le corps repose par une de ses faces sur un plan quelconque, il faut que la verticale *GC* abaissée du centre de gravité passe par un des points de la base, sans quoi le corps culbutera du côté de cette verticale. Fig. 58.

C'eſt ainſi que les murailles ſe ſoutiennent perpendiculairement à l'horizon, lors même que les pierres ne ſont point liées entr'elles par du mortier ou par du plâtre, toutes les fois qu'elles ſont bien à-plomb. Jamais elles ne peuvent être renverſées, tant que la verticale qui paſſe par leur centre de gravité, eſt appuyée ſur les fondements. Donc la ſtabilité d'un mur dépend beaucoup de l'épaiſſeur de ſes fondations.

Et cette ſtabilité ſera toujours d'autant plus forte, que le mur ſera moins élevé, toutes choſes d'ailleurs égales : car s'il eſt d'une hauteur conſidérable, la plus petite inclinaiſon fera tomber aiſément hors de la baſe, la perpendiculaire qui paſſe par le centre de gravité. La chûte du mur ſera donc inévitable, ſi à force de ciment, ou de crampons de fer, ou d'étais, on n'oppoſe pas une réſiſtance proportionnée aux efforts de la réſultante.

Fig. 59. Suppoſons en effet que *G C* ſoit la verticale menée par le centre de gravité, & décompoſons ſon effort en deux autres, l'un *G F* tout le long du mur, l'autre *G E* perpendiculaire à ce même mur. Le premier ſera détruit par la réſiſtance des fondements : le ſecond ne peut l'être que par la forte liaiſon de la maçonnerie : car alors cette muraille fait les fonctions d'un levier d'autant plus favorable à l'effort *GE*, qu'elle eſt plus inclinée. Il faudra donc en *A* une réſiſtance d'autant plus forte, qu'un bâtiment ſera moins à-plomb ; ce qui rend palpable l'utilité des fondations profondes & bien aſſiſes.

150. Quant aux corps qui font appuyés par plufieurs faces fur un plan horizontal, ils doivent refter en équilibre, foit que la verticale menée du centre de gravité tombe fur l'une ou l'autre de ces faces, foit qu'elle tombe entr'elles, de maniere à ne pas les laiffer toutes du même côté. Si l'une de ces deux conditions n'a pas lieu, on ne pourra point décompofer la réfultante en autant de puiffances paralleles qu'il y aura de points de contact; elle ne fera donc pas détruite totalement, & par conféquent ces fortes de corps fe renverferont fur le plan qui les foutient.

Soit, par exemple, le corps *M* appuyé en *A* & en *B*. Pour qu'il refte en équilibre, il faut que la verticale menée par fon centre de gravité paffe par un des points de la ligne *A B*. S'il étoit appuyé en *A*, en *B* & en *C*, alors fon équilibre exigeroit que la verticale tombât au-dedans du triangle *A B C* : & fi *A*, *B*, & *C* étoient des furfaces quelconques qui ferviffent d'appui au corps *N*, il faudroit pour la même raifon que la verticale tombât au-dedans de la figure triangulaire formée par les tangentes des trois bafes. Fig. 60. Fig. 61.

151. Concevez maintenant une maffe de la forme *AGB*, qui fuivant les conditions que l'on vient d'expofer, foit en équilibre fur fes deux bafes *A* & *B*, & fuppofez que fon centre de gravité foit en *G* : fon poids agira fuivant la verticale *G C*, & s'efforçant d'écarter à droite & à gauche les parties qui s'oppofent à la defcente du point *G*, il employera toute fon énergie, à en précipiter la chûte. Donc fi le corps eft flexible jufqu'à un certain point, l'effort de fon centre Fig. 62.

de gravité le fera fléchir, jufqu'à ce que la réfiftance des parties latérales s'oppofe à de nouveaux degrés d'inflexion, & alors tout fe paffera, comme fi le corps étoit devenu parfaitement roide.

Nous en voyons dans la Nature des exemples fréquents; car tous les corps ont quelque degré de flexibilité plus ou moins grand. Les cordes fur-tout y font fort fujettes; & c'eft ce qui empêche qu'on puiffe jamais les tendre exactement en ligne droite, dans toute autre direction que celle de la verticale. On a beau employer une très-grande force, elles confervent toujours une certaine inflexion, qui fe fait principalement remarquer dans leur milieu. Les poutres mêmes, pour peu qu'elles foient longues & chargées, fe courbent & s'affaiffent d'une maniere fenfible, lorfqu'elles ne font appuyées que par leurs extrêmités. Delà vient qu'on eft fouvent obligé de les étayer par le milieu, afin de prévenir leur rupture.

REMARQUE.

LA ftabilité d'un corps fur un plan horizontal dépend, comme nous l'avons dit, de la pofition de fa réfultante par rapport au plan qui le foutient. Donc plus cette réfultante approche du centre de gravité des furfaces par lefquelles le corps eft appuyé, plus le corps eft ftable; & plus elle s'écarte de ce centre en s'approchant des bords, plus la chûte du corps eft prochaine.

C'eft ce que nous éprouvons tous les jours de mille manieres différentes. Lorfque nous fommes debout & bien

droits, la verticale menée par notre centre de gravité passe exactement entre nos pieds (cette verticale s'appelle la *ligne de direction.*) Quand nous marchons, presque tous nos mouvements ont pour but de maintenir cette ligne dans la même position; & lorsque nous ne sommes appuyés que sur la pointe d'un pied, il faut que la résultante aboutisse à ce point d'appui. En général nous ne pouvons jamais tomber, que lorsque notre ligne de direction laisse nos appuis du même côté.

Quand il s'agit de porter d'une main un poids considérable, un sceau d'eau, par exemple, notre centre de gravité change de place, la ligne de direction en change aussi, & nous nous sentons entraînés vers le côté du poids que nous portons. Notre marche alors devient moins libre, & si le poids est trop lourd, nous courons risque de tomber. Si nous prévenons la plupart de ces chûtes, c'est que par un méchanisme d'autant plus admirable qu'il est plus naturel, plus prompt, & moins pénible, nous rappellons bien vîte notre centre de gravité vers le sens contraire, en étendant simplement l'autre bras. Lorsque nous voulons marcher, en portant à droite & à gauche des poids égaux, cela nous devient plus facile, parce que des charges égales ajoutées de part & d'autre ne changent point la ligne de direction, & que le centre de gravité ne fatigue pas inégalement les parties de notre corps.

Pour gravir au haut d'une montagne escarpée, nous nous jettons plus ou moins en avant sur la pointe des pieds, pour contre-balancer l'effort de notre poids qui tend à nous entraîner en arriere : & par une raison contraire, nous

nous appuyons ſur les talons, quand il faut deſcendre d'une montagne, ou d'une échelle un peu roide. En général, nos mouvements particuliers & ſur-tout le frottement contribuent beaucoup à modifier les effets de notre poids, & à conſerver une ſtabilité conſtante au milieu de tout ce qui tend à la détruire. Mais l'expérience & l'habitude en enſeignent plus à cet égard, que tous les livres de Méchanique enſemble. Voyez avec quelle adreſſe les Danſeurs de corde, les Couvreurs & les Mouſſes gardent leur équilibre, dans des poſitions où les plus habiles Méchaniciens ſeroient ſouvent bien embarraſſés.

Du mouvement uniforme des centres de gravité.

152. Soit un ſyſtême de corps parfaitement libres, qui n'étant pas liés entr'eux puiſſent obéir aux impulſions qu'on leur donnera ſéparément. On demande quel ſera le mouvement du centre de gravité de tout le ſyſtême, ſi chacune de ſes parties ſe meut avec une vîteſſe particuliere.

Ici on voit que ce centre doit changer de ſituation & ſe mouvoir à meſure que l'état du ſyſtême varie. Ce n'eſt plus ce point fixe & immuable qui réunit en quelque ſorte toutes les forces d'un même corps ou d'un même ſyſtême dont les parties ſont liées entr'elles. C'eſt un point mobile dont la direction & la vîteſſe dépendent de celles que chaque partie du ſyſtême eſt ſuppoſée avoir.

Or nous ſavons que toutes les fois que les parties d'un ſyſtême ſont animées de mouvements égaux & paralleles dans

le même ſens, la réſultante générale paſſe par le centre de gravité (93), & l'oblige par conſéquent de ſe mouvoir avec une vîteſſe égale & parallele à celle du ſyſtême. Donc lorſque pluſieurs forces égales & paralleles agiſſent enſemble & dans la même direction, ſur les diverſes parties du même ſyſtême, le centre de gravité doit ſuivre leur direction, & avancer en ligne droite avec toute la vîteſſe commune.

Pareillement, ſi le centre de gravité d'un corps ou d'un ſyſtême quelconque dont les parties ſont ſolidement liées entr'elles, ſe meut par l'action de quelque puiſſance, ſon mouvement doit ſe diſtribuer également dans tout le ſyſtême ; & chaque partie doit ſe mouvoir avec une vîteſſe égale & parallele à la ſienne.

153. Donc, en général, ſi une force quelconque agit ſur un corps ſuivant une direction qui paſſe par ſon centre de gravité, toutes les parties de ce corps marcheront enſemble dans des directions paralleles à celle du centre. Pour connoître leur vîteſſe, on diviſera par la maſſe du corps, la quantité de mouvement que la puiſſance aura imprimée.

Ainſi, pourvu que les directions de pluſieurs puiſſances concourent toutes au centre de gravité, ou du moins pourvu que leur réſultante paſſe par ce centre, le mouvement du corps ſera parallele à la direction de la réſultante, & la vîteſſe de chaque partie ſera égale à la réſultante diviſée par la maſſe du mobile. Bien entendu qu'alors on ſuppoſe les parties du ſyſtême ſolidement unies entr'elles.

154. D'après cela, cherchons les propriétés que doit

Fig. 63. avoir le mouvement du centre de gravité G d'un nombre quelconque de corps A, B, C, &c, mûs uniformément suivant des lignes paralleles aA, bB, cC, avec des vîtesses respectives V, V', V''.

1°, Ce centre doit suivre une ligne droite GG', parallele aux directions des corps. Car puisque dans l'origine du mouvement, la somme des moments est zéro, si on les prend par rapport à tout plan qui passe par GG', il faut qu'elle soit zéro encore dans la suite, puisque la distance de ces corps au plan que l'on a choisi, est constamment la même dans l'hypothese présente. Donc le centre de gravité se trouve à chaque instant sur tous les plans qui passent par GG' ; il ne s'écarte donc pas de leur intersection commune, qui est cette même ligne GG'.

2°, Son mouvement doit être uniforme. Car en supposant que $abgc$ soit le profil d'un plan perpendiculaire aux directions des mobiles, on a au commencement du mouvement

$$(A+B+C)Gg = A \,.\, Aa + B \,.\, Bb + C \,.\, Cc,$$

& après un temps quelconque t, ces corps ayant parcouru les espaces Vt, $V't$, $V''t$, ensorte qu'ils se trouvent en A', B', C', leur centre de gravité sera en G' ; donc en rapportant les moments au même plan vertical $abgc$, on aura

$$(A+B+C)G'g = A \,.\, A'a + B \,.\, B'b + C \,.\, C'c$$

& si on soustrait de cette équation celle qui précede, il viendra

$$(A+B+C)GG' = A \,.\, AA' + B \,.\, BB' + C \,.\, CC' =$$
$$A \,.\, Vt + B \,.\, V't + C \,.\, V''t = (AV + BV' + CV'')t$$

Donc l'efpace GG' parcouru par le centre de gravité eft proportionnel au temps; donc le mouvement de ce centre eft uniforme.

3°, La fomme des quantités de mouvement de tous ces corps eft égale à la feule quantité de mouvement de leur centre de gravité. Car fi on appelle v la vîteffe de ce centre, on aura

$$(A+B+C)v = AV + BV' + CV''.$$

Or $A+B+C$ exprime la maffe du centre de gravité; donc le premier membre de l'équation exprime fa quantité de mouvement. Le fecond membre eft évidemment la fomme des quantités de mouvement des trois mobiles. Il y a donc égalité parfaite.

Au refte, il ne faut pas oublier, lorfque quelqu'un de ces corps fe meut en fens contraire aux autres, de retrancher fa quantité de mouvement de la fomme des autres, pour avoir celle du centre commun de gravité.

Il fuit delà que fi les différentes parties d'un fyftême ont des vîteffes égales, paralleles & dans le même fens, la vîteffe du centre de gravité doit toujours être égale à celle de chaque partie, ainfi que nous l'avons déja dit.

155. Il fuit encore, que les parties d'un fyftême quelconque de corps étant mifes en mouvement par des forces paralleles, le centre de gravité doit fe mouvoir avec la vîteffe qu'il auroit acquife par l'action fimultanée de toutes ces puiffances, fi elles lui euffent été appliquées immédiatement; car alors fa quantité de mouvement fera égale à la fomme

de toutes les quantités de mouvement des différents mobiles.

Et delà suit enfin que le centre de gravité d'un systême doit être immobile, toutes les fois que la somme des quantités de mouvement des corps qui vont dans un sens est égale à la somme des quantités de mouvement de ceux qui vont en sens contraire.

156. Mais qu'arrivera-t-il, si toutes les parties du systême sont mises en mouvement par des puissances quelconques qui les obligent de se mouvoir dans des directions quelconques ?

On a vu que toute puissance pouvoit être décomposée en trois autres paralleles à trois lignes données de position. J'appelle ces lignes X, Y, Z. On peut donc substituer au mouvement de chaque partie d'un systême, trois autres mouvements paralleles à ces lignes; & puisqu'en vertu des mouvements paralleles à X, le centre de gravité doit se mouvoir, comme si toutes les puissances paralleles à X lui étoient immédiatement appliquées, (il en est de même par rapport aux puissances paralleles à Y & à Z), il est clair que le centre de gravité se mouvra réellement, comme si toutes ces forces paralleles à X, Y, Z, agissoient immédiatement sur lui, c'est-à-dire, comme s'il étoit sollicité lui seul à se mouvoir, par la résultante générale de toutes les puissances appliquées aux différentes parties du systême.

Donc si la résultante de toutes ces forces est zéro, le centre de gravité reste immobile.

Nous supposons ici que les parties du systême ne sont

point liées entr'elles. Si elles l'étoient, il n'en feroit pas moins vrai que le centre de gravité auroit le même mouvement, que si toutes les puissances agissoient immédiatement sur lui. On le verra dans la Dynamique.

Des Centres de gravité & des Axes d'équilibre, lorsque la pesanteur varie, & que toutes ses directions concourent au même point.

[157. Si l'action de la pesanteur étoit par-tout la même, & si les lignes de direction ne concouroient pas au même point, il n'y auroit rien à ajouter aux principes déja posés, pour déterminer le centre de gravité. Mais les directions de la pesanteur concourent toutes au centre de la Terre, & sa force diminue en raison inverse du quarré des distances à ce même centre, comme les observations & le calcul le prouvent de concert. Il y a donc quelque chose à ajouter à la théorie précédente, pour la rendre complette. *

Ses résultats cependant ne produiront jamais d'erreur sensible, tant qu'on ne l'appliquera qu'à des usages semblables à ceux dont nous avons donné le détail. On voit bien en effet que dans un même corps & dans un même système de corps, tels que nous les avons considérés, toutes les parties gravitent suivant des lignes paralleles, avec une énergie qu'on peut supposer égale, sans erreur sensible. Il faut donc s'en tenir à cette théorie, pour déterminer en pareils cas le centre de gravité.

Mais afin de l'étendre à la supposition qui a lieu dans la

Nature, cherchons les centres de gravité, ou plutôt les *Axes d'équilibre*, lorſque les directions de la peſanteur concourent au même point.

Fig. 64. 158. Soit C le point de leur concours; ſoient M, M', M'' autant de points matériels que l'on voudra, ſitués dans le même plan que le centre C; & ſuppoſons que la peſanteur leur imprime, dans un inſtant, des quantités de mouvement dirigées vers le centre, & repréſentées par $Mm, M'm', M''m''$. Leur réſultante RC ſera néceſſairement dirigée ſur le point C, & ſa direction ſera connue, auſſi-tôt qu'on aura évalué l'angle ACR, qu'elle forme avec une droite quelconque CA donnée de poſition.

Or il eſt évident qu'un point quelconque de cette réſultante étant ſoutenu, tout le ſyſtême le ſera, & que ſon équilibre ne ſouffrira aucune altération, ſoit que tout reſte dans la ſituation préſente, ſoit que tout le ſyſtême tourne autour de la ligne CR. C'eſt cette ligne que nous appellons l'*axe d'équilibre*.

Comme dans les différentes ſituations d'un corps, l'axe d'équilibre ne paſſe pas toujours par un même point de ce corps, on peut dire en quelque ſorte qu'il n'y a pas alors de centre de gravité. On eſt réduit dans ces cas-là à chercher l'axe d'équilibre & le poids du corps, qui à meſure que la diſtance au centre varie, varient auſſi.

159. Suppoſons donc que la peſanteur agiſſe en raiſon directe de la diſtance, de maniere que ſi g eſt la vîteſſe qu'elle communique aux corps éloignés d'une quantité a du

centre C, la vîtesse qu'elle communiqueroit à la distance x soit $\frac{gx}{a}$. Alors celle que recevra le point M sera $\frac{g}{a} CM$, & la quantité de mouvement qui en résultera pour ce point, sera $\frac{g}{a} CM . M$; on aura donc $Mm = \frac{g}{a} CM . M$; on trouvera pareillement $M'm' = \frac{g}{a} CM' . M'$, & $M''m'' = \frac{g}{a} CM'' . M''$.

Soient maintenant deux droites quelconques CA, CB perpendiculaires entr'elles, & soit décomposée chaque force Mm en deux autres Mp, Mq paralleles à ces droites : la résultante de toutes les forces paralleles à CA sera $= Mq + M'q' + M''q''$ (63) & la résultante des forces paralleles à CB se trouvera $= Mp + M'p' + M''p''$; donc puisqu'on sait déja que la résultante générale RC doit passer par le point C, on n'a qu'à prendre $CR' = Mq + M'q' + M''q''$, & $CR'' = Mp + M'p' + M''p''$, afin de pouvoir completter le rectangle $R'R''$, qui déterminera la valeur & la direction de la résultante cherchée. On connoîtra donc l'axe d'équilibre & le poids du systême.

Cela posé, les triangles semblables donneront $CM : Mm$, ou $CM : \frac{g}{a} CM . M$, ou bien encore $a : g M :: MP : Mp = \frac{gM . MP}{a} :: CP : mp = \frac{gM . CP}{a}$.

Donc... $CR' = \frac{g}{a} [M . CP + M' . CP' + M'' . CP'']$;

&..... $CR'' = \frac{g}{a} [M . MP + M' . M'P' + M'' . M''P'']$.

Donc... $\frac{M . MP + M . M'P' + M'' . M''P''}{M . CP + M' . CP' + M'' . CP''} = \frac{RR'}{CR'} = tang\ RCR'$;

formule qui fera toujours connoître l'axe d'équilibre dans la supposition présente. Soit G le centre de gravité dans

le cas des directions paralleles, on aura (97)

$$(M+M'+M'')\,GG' = M.MP + M'.M'P' + M''.M''P''$$

$$(M+M'+M'')\,CG' = M.MQ + M'.M'Q' + M''.M''Q''$$

Donc $\frac{GG'}{CG'} = \frac{RR'}{CR'}$, & par conſéquent le point G ſe trouve ſur la droite CR : ainſi l'axe d'équilibre CR paſſe par le centre commun de gravité; il y paſſeroit de même dans toute autre ſituation du ſyſtême. Donc quoique dans l'hypotheſe préſente, la peſanteur ſoit dirigée vers un point fixe, & que ſa force ſoit ſuppoſée croître proportionnellement aux diſtances de ce point, il n'en eſt pas moins vrai que tous les axes d'équilibre paſſeroient par le centre de gravité, comme ſi la force de la peſanteur eût été conſtante, & qu'elle eût produit ſon effet ſuivant des directions paralleles.

Il n'y aura que le poids ſeul du ſyſtême qui variera dans ſes diverſes ſituations. Et ſi nous n'avons démontré cette propriété remarquable, que pour le cas où tout le ſyſtême eſt dans le même plan que le centre des forces, c'eſt qu'avec les principes que nous venons d'expoſer, on peut facilement étendre la démonſtration à l'autre cas.

160. Si on excepte cette premiere ſuppoſition des accroiſſements de la peſanteur proportionnels aux diſtances du centre des forces, le centre de gravité n'eſt plus un point fixe. Il varie à chaque poſition différente du ſyſtême dont on eſt alors obligé de chercher l'axe d'équilibre & le poids pour chaque ſituation particuliere qu'on lui donne. Mais pour borner ces recherches à l'hypotheſe qui paroît avoir généralement lieu dans la Nature, nous ſuppoſerons ici que

la

la pesanteur agit en raison inverse du quarré de la distance au centre des forces.

161. Soit donc g la vîtesse que la force centrale peut imprimer dans un instant à telle partie que l'on voudra du systême, soit f la distance de cette partie au centre C; on aura $\frac{gff}{xx}$ pour l'expression de la vîtesse que la pesanteur imprimeroit à toute autre partie éloignée d'une quantité x; car $\frac{1}{ff} : \frac{1}{xx} :: g : \frac{gff}{xx}$. Fig. 64.

Cela posé, on aura $Mm = \frac{gff \cdot M}{MC^2}$, $M'm' = \frac{gff \cdot M'}{M'C^2}$, $M''m'' = \frac{gff \cdot M''}{M''C^2}$; & par conséquent

$$CR' = gff\left[\frac{M \cdot CP}{MC^3} + \frac{M' \cdot CP'}{M'C^3} + \frac{M'' \cdot CP''}{M''C^3}\right]$$

$$RR' = gff\left[\frac{M \cdot MP}{MC^3} + \frac{M' \cdot M'P'}{M'C^3} + \frac{M'' \cdot M''P''}{M''C^3}\right]$$

Donc la tangente de l'angle que fait l'axe d'équilibre RC avec la ligne CA, se trouvera par l'équation suivante;

$$Tang\ ACR = \frac{\frac{M \cdot MP}{MC^3} + \frac{M' \cdot M'P'}{M'C^3} + \frac{M'' \cdot M''P''}{M''C^3}}{\frac{M \cdot CP}{MC^3} + \frac{M' \cdot CP'}{M'C^3} + \frac{M'' \cdot CP''}{M''C^3}}.$$

On déterminera la valeur RC de la résultante, ou l'effort nécessaire à chaque instant pour soutenir le systême par son axe d'équilibre, en employant l'expression qui suit

$$RC = gff\sqrt{\left[\left(\frac{M \cdot CP}{MC^3} + \frac{M' \cdot CP'}{M'C^3} + \frac{M'' \cdot CP''}{M''C^3}\right)^2 + \left(\frac{M \cdot MP}{MC^3} + \frac{M' \cdot M'P'}{M'C^3} + \frac{M'' \cdot M''P''}{M''C^3}\right)^2\right]}$$

On connoîtra donc le poids du systême. Mais nous supposons encore que tous les points pesants sont dans un même plan avec le centre des forces.

EXEMPLE.

FIG. 65. 162. La ligne droite AB étant donnée, on demande quel eſt ſon axe d'équilibre ?

Soit C le centre des forces, ſoit la ligne ED menée par ce centre parallélement à AB, & ſoit enfin abaiſſée d'un point quelconque M une perpendiculaire MP ſur la droite ED. On prendra d'abord un élément infiniment petit Mm, & on aura, comme on vient de le voir, $CR' = gff \,.\int \frac{CP \,.\, Mm}{MC^3}$ & $RR' = gff \,.\int \frac{MP \,.\, Mm}{MC^3}$: faiſant enſuite $CP = x$, $PM = h$, $MC = z$, l'angle $MCP = \varphi$, on aura

$$CR' = gff \,.\int \frac{-x\,dx}{z^3}, \quad RR' = gff \,.\int \frac{-h\,dx}{z^3}.$$

Or $z = \frac{h}{\sin\varphi}$, $x = h \cot\varphi$, & $dx = \frac{-h\,d\varphi}{\sin^2\varphi}$; donc $\frac{-x\,dx}{z^3} = \frac{d\varphi \cos\varphi}{h}$. L'intégrale eſt $\frac{1}{h}(\sin\varphi + C)$, & en la prenant depuis B juſqu'en A, elle devient $\frac{1}{h}(\sin ACD - \sin BCD)$. Pareillement $-\frac{h\,dx}{z^3} = \frac{1}{h} d\varphi \sin\varphi$, dont l'intégrale $\frac{1}{h}(C - \cos\varphi)$ étant priſe depuis B juſqu'en A eſt $\frac{1}{h}(\cos BCD - \cos ACD)$: donc

$$CR' = \frac{gff}{h}(\sin ACD - \sin BCD);$$
$$RR' = \frac{gff}{h}(\cos BCD - \cos ACD).$$

Mais pour abréger, nommons A, B, C, les angles CAB, ABC, ACB, ce qui donnera $CR' = \frac{gff}{h}(\sin A - \sin B)$, & $RR' = \frac{gff}{h}(\cos A + \cos B)$; d'où nous conclurons

$$\text{Tang } RCR' = \frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B} = \cot \frac{A - B}{2}.$$

Donc l'angle $GCR' = 90° - \frac{1}{2}(A - B) = \frac{180° - A + B}{2}$; &

retranchant l'angle $BCD = B$, il reſtera l'angle $GCB = \frac{180° - A - B}{2} = \frac{C}{2}$.

163. Il ſuit delà que l'axe d'équilibre CG d'une ligne droite quelconque AB diviſe en deux parties égales l'angle ACB formé par les deux rayons menés du centre des forces aux extrêmités de cette ligne ; propriété remarquable pour ſa ſimplicité.

On voit donc que dans l'hypotheſe préſente, le centre de gravité G d'une droite AB n'eſt ni au milieu, ni à tout autre point fixe de cette ligne. Il change de poſition à meſure qu'elle en change elle-même, par rapport au centre des forces. Le ſeul cas qui faſſe exception, eſt celui où la ligne tourne autour de ſon axe d'équilibre ; car alors il eſt bien évident que ſon centre de gravité ne varie point.

Le réſultat que nous venons d'obtenir, prouve d'une maniere ſenſible que toutes les droites AB, ab compriſes dans l'angle ACB, ont le même axe d'équilibre CGg, & que celui d'un trapeze $ABba$ dont deux côtés concourent au centre, eſt auſſi une droite CGg qui diviſe l'angle ACB en deux parties égales. FIG. 66.

Cherchons maintenant le poids d'une ligne quelconque AB ou la réſultante CR. On reprendra les valeurs de CR'', RR'', qui donneront $CR = \frac{gff}{h}\sqrt{(\text{cof}\,A + \text{cof}\,B)^2 + (\text{ſin}\,A - \text{ſin}\,B^2)}$ $= \frac{gff}{h}\sqrt{2 + 2\,\text{cof}\,(A+B)} = \frac{gff}{h}\sqrt{2 - 2\,\text{cof}\,C} = \frac{gff}{h}\cdot 2\,\text{ſin}\,\frac{1}{2}C$; h eſt la perpendiculaire CF menée du centre C ſur la droite AB. FIG. 65.

Or gff étant un facteur commun qui entre dans l'ex-

preſſion de tous les poids, nous pouvons l'écarter du calcul, en le ſuppoſant égal à l'unité. Le poids d'une ligne quelconque AB ſera donc $\frac{2 \sin \frac{1}{2} ACB}{CF}$.

Fig. 67. 164. Et delà nous conclurons que toutes les tangentes AGB, agb d'un arc DGE compris entre les rayons menés du centre des forces, ont le même axe d'équilibre & ſont également peſantes, quoique d'inégales longueurs. Nous pourrions conclure auſſi que le poids d'une ligne infiniment étendue, ne ſeroit pas infini dans l'hypotheſe préſente, ce qui eſt aiſé à concevoir.

Fig. 68. 165. D'après ce qui a été dit, il n'eſt pas fort difficile de déterminer l'axe d'équilibre du contour d'un polygone quelconque. Suppoſons en effet qu'il s'agiſſe d'un quadrilatere $ABCD$ ſitué dans le plan du centre des forces S. On menera à tous ſes angles, des rayons AS, BS, CS, DS; puis on diviſera en deux parties égales les angles ASB, BSC, CSD par autant d'axes d'équilibre Sa, Sb, Sc.

Cela poſé, tout le poids de la ligne CD qui a pour expreſſion $\frac{2 \sin DSc}{SK}$ agit en c ſuivant cS: & ſi on le décompoſe en deux autres, l'un ſuivant CC' ou perpendiculairement à une ligne donnée Sc', l'autre parallélement à cette même ligne, celui-ci aura pour valeur $\frac{2 \sin DSc \cos cSc'}{SK}$. Faiſant donc la même décompoſition pour tous les autres poids, on aura généralement

$$SG' = \frac{2 \sin DSc \cos cSc'}{SK} + \frac{2 \sin CSb \cos bSb'}{SK'} + \frac{2 \sin DSd \cos dSd'}{SK'''} - \frac{2 \sin ASa \cos aSd}{SK''}.$$

$$GG' = \frac{2 \sin DSc \sin cSc'}{SK} + \frac{2 \sin CSb \sin bSb'}{SK'} + \frac{2 \sin ASa \sin aSa'}{SK''} + \frac{2 \sin DSd \sin dSd'}{SK'''};$$

d'où on déduira l'expreſſion de la tangente de l'angle GSG' qui donnera la direction de l'axe d'équilibre SG. On aura auſſi la valeur de SG qui repréſente le poids de tout le ſyſtême.

Si toutes les lignes n'étoient pas dans le même plan que le centre des forces, on trouveroit leur axe d'équilibre, en ſuivant les principes que nous venons d'expoſer. Paſſons à la recherche de l'axe d'équilibre d'un arc quelconque de courbe.

166. Soit l'arc AMB ſitué dans le plan du centre C. Fig. 69.
On conſidérera un de ſes éléments Mm, & on trouvera que ſa maſſe ds peſe vers le centre C, dans la direction CM avec une force exprimée par $\frac{ds}{CM^2}$. Soit à préſent $CP = x$, & l'angle $MCP = \varphi$. Si on décompoſe l'effort ſuivant MC en deux autres, l'un parallele à CP, l'autre parallele à MP, celui-ci aura pour expreſſion $\frac{ds}{CM^2} \sin \varphi$ ou $\frac{ds \sin \phi \cos^2 \phi}{xx}$, & l'autre ſera exprimé par $\frac{ds}{CM^2} \cos \varphi$ ou $\frac{ds \cos^3 \phi}{xx}$. Donc CR étant l'axe d'équilibre & le poids de l'arc donné AMB, on aura

$$CR' = \int \frac{ds \cos^3 \phi}{xx} \; .\;.\;.\;.\; RR' = \int \frac{ds \sin \phi \cos^2 \phi}{xx}.$$

Exemple.

167. L'arc AMB appartient à un cercle décrit du centre C & du rayon a; on demande quelle eſt la direction de ſon axe d'équilibre, & quel eſt ſon poids.

Ici on a $x = a\,cof\,\phi$, $ds = -a\,d\phi$; donc

$$RR' = \int \frac{-d\phi\,fin\,\phi}{a} = \frac{cof\,\phi + C}{a} = \frac{cof\,BCb - cof\,ACa}{a}$$

$$CR' = \int \frac{-d\phi\,cof\,\phi}{a} = \frac{C - fin\,\phi}{a} = \frac{fin\,ACa - fin\,BCb}{a}$$

$$Tang\,RCR' = \frac{cof\,BCb - cof\,ACa}{fin\,ACa - fin\,BCb} = Tang\,\frac{BCb + ACa}{2}.$$

D'où il eſt aiſé de conclure que l'axe d'équilibre CR diviſe en deux parties égales l'arc AMB, comme cela doit être. Quant au poids de cet arc, ſon expreſſion eſt

$$\frac{1}{a}\sqrt{(cof\,BCb - cof\,ACa)^2 + (fin\,ACa - fin\,BCb)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{2 - 2cof\,ACB} = \frac{2\,fin\,\frac{1}{2}\,ACB}{a}.$$

Ce poids eſt donc le même que celui d'une tangente quelconque ; il eſt donc égal à la corde de l'arc diviſée par le quarré du rayon.

Fig. 70. 168. Propoſons-nous maintenant de trouver l'axe d'équilibre d'un trapeze quelconque $AabB$, formé par un arc de courbe AMB, deux ordonnées Aa, Bb & une abſciſſe ab dont la direction paſſe par le centre des forces C.

On voit d'abord que toutes ces lignes réunies forment un ſyſtême dont le plan paſſe par le point C. Soit donc $MPpm$ l'élément de cette figure, ſoit l'angle $MCP = \phi$, $CP = x$, $CM = \frac{x}{cof\,\phi}$, $PM = x\,tang\,\phi$. L'axe d'équilibre du petit trapeze $MPpm$ ſera le même que celui de l'ordonnée MP, c'eſt-à-dire, une droite CG qui partage également l'angle MCP. Son poids aura pour expreſſion, $\frac{2\,fin\,\frac{1}{2}\,\phi\,.\,dx}{x}$, puiſque celui de MP eſt exprimé par $\frac{2\,fin\,\frac{1}{2}\,\phi}{x}$. Or ce poids eſt cenſé agir en G ſuivant CG : on le décompoſera donc en deux

autres l'un ſuivant GP, l'autre ſuivant CP. Le premier aura pour valeur $\frac{2\, fin^2 \frac{1}{2}\phi \,.\, dx}{x}$, le ſecond, $\frac{2\, fin \frac{1}{2}\phi \,.\, cof \frac{1}{2}\phi \,.\, dx}{x} = \frac{fin\, \phi\, dx}{x}$; ce qui donnera les formules ſuivantes.

$$CR' = \int \frac{fin\, \phi\, dx}{x} \ldots RR' = \int \frac{2\, fin^2 \frac{1}{2}\phi\, dx}{x} = \int \frac{dx}{x}\,(1 - cof\,\phi)$$

$$Tang\; RCR' = \frac{\int \frac{dx}{x}\,(1 - cof\,\phi)}{\int \frac{dx}{x}\, fin\,\phi}.$$

169. Suppoſons enfin qu'il s'agiſſe de trouver l'axe d'équilibre d'une ſurface dont le plan ne paſſe point par le centre des forces. On menera de ce centre C une perpendiculaire CA au plan de la ſurface propoſée, & on fera paſſer par le point A la ligne des abſciſſes AP. FIG. 71.

Soit PM une ordonnée de la ligne qui termine cette ſurface; ſon axe d'équilibre ſera une droite CG diviſant en deux parties égales l'angle MCP, & ſon poids aura pour expreſſion $\frac{2\, fin \frac{1}{2} MCP}{CP}$; donc celui de l'élément $MmpP$ ſera exprimé par $\frac{2\, fin \frac{1}{2} MCP \,.\, Pp}{CP}$.

Ce poids eſt cenſé agir en G ſuivant GC; on peut donc le décompoſer en deux autres, l'un parallélement à AC, & qui aura pour valeur $\frac{2\, fin \frac{1}{2} MCP \,.\, Pp}{CP} \,.\, \frac{CA}{CG}$, l'autre ſuivant GA & qui ſera exprimé par $\frac{2\, fin \frac{1}{2} MCP \,.\, Pp}{CP} \,.\, \frac{GA}{CG}$. Celui-ci à ſon tour peut être décompoſé en deux autres, dont l'un agiroit parallélement à PA, avec une force $= \frac{2\, fin \frac{1}{2} MCP \,.\, Pp}{CP} \,.\, \frac{AP}{CG}$, l'autre parallélement à GP, avec une force exprimée par $\frac{2\, fin \frac{1}{2} MCP \,.\, Pp}{CP} \,.\, \frac{PG}{CG}$.

Maintenant faiſons $CA = b$, $AP = x$, $PM = y$, &

nous aurons $CP = \sqrt{bb + xx}$, $CM = \sqrt{(bb + xx + yy)}$, $CG = \frac{CP}{cos\frac{1}{2}MCP}$, & par conséquent $\frac{2 fin\frac{1}{2}MCP}{CG.CP} = \frac{2 fin\frac{1}{2}MCP\, cos\frac{1}{2}MCP}{CP^2} = \frac{fin\, MCP}{CP^2} = \frac{y}{(bb+xx)CM}$; enfin $CM : CP :: MG : GP$, ou $CM + CP : CP :: PM : GP = \frac{PM.CP}{CM+CP} = \frac{CP}{PM}(CM - CP)$.

Donc si CR est l'axe d'équilibre & le poids du trapeze $MPQN$, & si du point R on mene RR' perpendiculaire sur le plan PAC, ainsi que $R'R''$ perpendiculaire sur CA, on aura les valeurs suivantes

$$CR'' = \int \frac{b\,y\,dx}{(bb+xx)\sqrt{(bb+xx+yy)}} \ldots R'R'' = \int \frac{x\,y\,dx}{(bb+xx)\sqrt{(bb+xx+yy)}}$$

$$RR' = \int \left[\frac{dx}{\sqrt{bb+xx}} - \frac{dx}{\sqrt{(bb+xx+yy)}} \right]$$

qui détermineront l'axe d'équilibre, & le poids du trapeze $MPQN$. On peut remarquer ici que CR coupant le trapeze au point T, ce point est en quelque sorte son centre de gravité : donc si on décompose en trapezes toutes sortes de figures planes, on trouvera par ces formules leurs centres de gravité.

EXEMPLE.

SOIT un quart de cercle ABD dont le centre est en A, & dont le rayon $= a$. On aura $yy = aa - xx$, & par conséquent

$$CR'' = \int \frac{b\,dx\sqrt{(aa-xx)}}{(bb+xx)\sqrt{(aa+bb)}}$$

$$R'R'' = \int \frac{x\,dx\sqrt{(aa-xx)}}{(bb+xx)\sqrt{(aa+bb)}}$$

$$RR' = \int \left[\frac{dx}{\sqrt{(bb+xx)}} - \frac{dx}{\sqrt{(aa+bb)}} \right].$$

Pour

Pour avoir la premiere intégrale, on posera $\frac{x}{\sqrt{(aa-xx)}}=u$, ce qui donnera $CR''=\int\left[-\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}\cdot\frac{du}{1+uu}+\frac{bdu\sqrt{(aa+bb)}}{bb+(aa+bb)uu}\right]$ $=-\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}\,\mathit{Arc\ tang}\,u+\mathit{Arc\ tang}\frac{u\sqrt{(aa+bb)}}{b}=-\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}\cdot$ $\mathit{Arc\ tang}\frac{x}{\sqrt{(aa-xx)}}+\mathit{Arc\ tang}\frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{b\sqrt{(aa-xx)}}$. Il ne faut point ici ajouter de constante, parce que l'intégrale doit s'évanouir, lorsqu'on suppose $x=0$. Ainsi pour avoir sa valeur dans toute l'étendue du quart du cercle, on prendra $x=a$; & si on appelle c le nombre 3,1415 &c, on aura

$$CR''=\frac{\sqrt{(aa+bb)}-b}{\sqrt{(aa+bb)}}\cdot\tfrac{1}{2}c.$$

Pour intégrer la seconde formule, on fera $\sqrt{(aa-xx)}=z\sqrt{(aa+bb)}$, ce qui la changera en celle-ci, $R'R''=\int\frac{-zzdz}{1-zz}=z+\tfrac{1}{2}l\frac{1-z}{1+z}+C=\frac{\sqrt{(aa-xx)}}{\sqrt{(aa+bb)}}+$ $\tfrac{1}{2}l\frac{\sqrt{(aa+bb)}-\sqrt{(aa-xx)}}{\sqrt{(aa+bb)}+\sqrt{(aa-xx)}}+C$. Prenant donc $x=a$, puis $x=0$, & retranchant le dernier résultat du premier, on trouvera

$$R'R''=\frac{-a}{\sqrt{(aa+bb)}}+l\frac{a+\sqrt{(aa+bb)}}{b}.$$

Enfin l'intégrale de la troisieme formule est $RR'=l\frac{x+\sqrt{(bb+xx)}}{b}-\frac{x}{\sqrt{(aa+bb)}}$, qui en posant $x=a$, donne

$$RR'=l\frac{a+\sqrt{(aa+bb)}}{b}-\frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}.$$

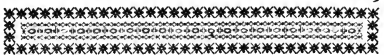
Et puisque $RR'=R'R''$, le centre de gravité T est sur le rayon AT qui divise le quart de cercle en deux parties égales.

La diſtance $AT = \frac{AC.RR''}{CR''} = \frac{\frac{2b\sqrt{2}}{c}[\sqrt{(aa+bb)}\, l \frac{a+\sqrt{(aa+bb)}}{b} - a]}{\sqrt{(aa+bb)}-b}$.

Enſorte que ſi $a = b$, on aura $AT = a . \frac{2(1+\sqrt{2})}{c}[2\, l(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}] = 0{,}535677\, a$. Or nous ſavons (132) que le centre de gravité ordinaire, dans un quart de cercle eſt à la diſtance $\frac{4}{3} . \frac{\sqrt{2}}{c} a = 0{,}600210\, a$, du point A : ces deux réſultats ne différent donc à peu près que de $\frac{2}{31}$ du rayon ; & leur difference vient de ce que dans la ſuppoſition que nous avons faite en dernier lieu, les parties qui ſont plus près du centre, peſent davantage.

Soit $b = \frac{40}{9} a$, alors $AT = a . \frac{2\sqrt{2} . 40}{c}[\frac{41}{9}\, l \frac{5}{4} - 1] = 0{,}595761\, a$. La différence eſt ici beaucoup plus petite, parce que le centre des forces eſt plus éloigné. Donc ſi $b =$ le demi-diametre de la Terre, pendant que $a =$ un petit nombre de pieds ou de pouces, il eſt évident que cette différence doit être inſenſible. En général, ſi dans la formule que nous avons trouvée pour AT, on ſuppoſe $b = \infty$, on trouvera préciſément, comme pour le centre de gravité ordinaire, que $AT = \frac{4}{3} . \frac{\sqrt{2}}{c} a$.] ★





LA STATIQUE.

SECTION II.

De l'Équilibre dans les Machines.

Des forces qui agiſſent immédiatement les unes contre les autres, ne peuvent être en équilibre, s'il n'y a pas entr'elles une parfaite égalité : mais lorſqu'on emploie des machines pour ſeconder leurs efforts, il arrive ſouvent que de très-foibles puiſſances ſoutiennent des maſſes énormes. C'eſt qu'au moyen de toutes ces inventions Méchaniques, que le beſoin & l'induſtrie produiſirent de concert, les hommes ſont parvenus à augmenter, pour ainſi dire, à leur gré l'énergie des moindres forces.

170. Parmi ces machines, il en eſt de ſimples, il en eſt de compoſées. Celles-ci ſe rapportent facilement aux autres ; il ſuffira donc de connoître les premieres. On peut les réduire à ſept ; *les Cordes*, *le Levier*, *la Poulie*, *le Treuil*, *le Plan incliné*, *la Vis* & *le Coin*. On pourroit même les réduire à un plus petit nombre, ſi quelques circonſtances particulieres n'engageoient pas à les conſidérer ſéparément.

Elles ont toutes le même but, celui de favoriſer la puiſſance qui lutte en quelque ſorte contre des obſtacles qu'elle ne pourroit ſurmonter ſeule, ou du moins qu'elle ne pourroit vaincre ſans peine. Mais il s'en faut bien qu'elles ſoient toutes également propres à produire cet effet. Pour apprécier l'efficacité des unes & des autres, on les a toutes ramenées à un même point de vue, qui eſt celui de l'équilibre; & on a cherché les conditions néceſſaires dans chacune de ces machines, pour que la puiſſance & la réſiſtance ſe contre-balancent mutuellement. Nous allons expoſer ſucceſſivement ces conditions.

DES CORDES.

Depuis que M. Varignon (*Nouv. Méc. Sect. II. page 93... 210*) a traité dans un grand détail ce qui regarde les cordes, on les a comptées parmi les machines ſimples, ſous le nom de *Machines funiculaires*. Elles ſont en effet un moyen de communication entre les différentes puiſſances, & on s'en ſert preſque toujours dans les autres machines. Il ne ſera donc pas inutile d'en faire connoître les principaux uſages. Mais afin d'établir quelque choſe de fixe, on eſt d'abord obligé de les ſuppoſer inflexibles & ſans peſanteur, ſauf à les conſidérer enſuite dans leur état naturel.

Fig. 72. Soient deux puiſſances *A* & *B* qui tirent en ſens contraire la corde *AB*; elles détruiront mutuellement leurs efforts, ſi elles ſont égales: l'équilibre aura donc lieu entr'elles dans cette ſuppoſition. Rien n'eſt plus clair.

171. Soient maintenant trois puiſſances A, B, C appliquées aux trois cordons AD, BD, CD unis enſemble au point D; on demande quelles doivent être les conditions de l'équilibre pour tout le ſyſtême. Fig. 73.

Repréſentons par Da la puiſſance A, & par Dc la puiſſance C; achevons le parallélogramme $aDcK$, & alors nous verrons 1°, que l'action de ces deux forces ſur le nœud D, ſera égale à leur réſultante DK; 2°, que le ſyſtême ne peut être mis en équilibre, ſi la puiſſance B repréſentée par Db ne détruit pas l'effort de cette réſultante; il faut donc qu'elle lui ſoit égale & oppoſée; elle doit donc être ſur la même ligne Kb, d'où il ſuit que *les trois cordons doivent être dans le même plan.*

De plus ces trois puiſſances A, C, B ſont entr'elles comme Da, Dc, DK : or $Da : Dc : DK :: \sin KDC : \sin aDK : \sin aDc :: \sin BDC : \sin ADB : \sin BDC$; donc

$$A : B : C :: \sin BDC : \sin ADC : \sin ADB;$$

d'où il ſuit que *chaque puiſſance doit être comme le ſinus de l'angle compris entre les directions des deux autres.*

172. Si au lieu d'être unie au cordon BD par le nœud D, la corde ADC ne faiſoit que paſſer par un anneau ſitué à l'extrémité D de la corde BD, alors il faudroit pour l'équilibre, que cet anneau ne pût pas gliſſer ſur la corde ADC; ce qui aura lieu toutes les fois que la ligne BDK diviſera en deux parties égales l'angle ADC. En pareil cas, les deux puiſſances A & C ſont égales, & on a les proportions ſuivantes;

$$A ; B :: \sin BDC : \sin ADC :: \sin \tfrac{1}{2} ADC : \sin ADC :: 1 : 2\cos \tfrac{1}{2} ADC.$$

173. Lorsque deux puissances *A* & *C* agissent l'une contre l'autre par le moyen de la corde *ADC* assujettie au point fixe *D* afin qu'elle ne glisse point, il est clair qu'elles doivent être égales, pour qu'elles soient en équilibre. D'où on déduit que deux forces quelconques, appliquées aux deux

Fig. 74. extrémités d'une corde tendue sur le contour d'un polygone, ou d'une courbe, ne peuvent être mises en équilibre, si elles ne sont pas égales.

174. Quand il y a plus de trois forces appliquées à autant de cordons liés ensemble par un même nœud, on cherche d'abord la résultante de deux de ces forces, ce qui les réduit à une de moins : puis on continue la même réduction, jusqu'à ce qu'on n'aye plus que deux puissances égales & opposées; & alors tout le systême se trouve en équilibre. Il en seroit de même, si quelques-uns de ces cordons étoient attachés à des appuis immobiles; parce que l'effort soutenu par chaque appui tiendroit lieu de puissance.

Fig. 75. 175. Supposons maintenant qu'une corde *ABCDH* soit tirée aux points *A*, *B*, *C*, *D*, *H* par des forces *A*, *E*, *F*, *G*, *H*, dont plusieurs peuvent n'être que des points d'appui. Pour déterminer les conditions de l'équilibre, & les *Tensions* respectives des cordons *AB*, *BC*, *CD*, *DH*, on observera que si tout le systême est en équilibre, toutes ses parties doivent y être aussi. On pourra donc regarder comme fixes les points *A* & *C*, pendant que la puissance *E* luttera contre ces deux appuis. Or elle ne peut être en équilibre avec leur résistance, si les deux proportions qui suivent, n'ont pas lieu.

La puiſſance E eſt au ſinus de l'angle ABC, comme la puiſſance A, ou l'effort ſoutenu par l'appui A, ou bien encore la tenſion du cordon AB que nous repréſenterons par T, AB, eſt au ſinus de l'angle EBC.

Cette même puiſſance E eſt au ſinus du même angle ABC, comme la tenſion du cordon BC eſt au ſinus de l'angle ABE; donc

$$E : fin\, ABC :: T, AB : fin\, EBC :: T, BC : fin\, ABE$$

Pareillement pour que la partie $BCDF$ ſoit en équilibre, il faut que l'on ait

$$F : fin\, BCD :: T, BC : fin\, FCD :: T, CD : fin\, BCF$$

Enfin l'équilibre particulier du ſyſtême $CDHG$ exige de même que

$$G : fin\, CDH :: T, CD : fin\, HDG :: T, DH : fin\, CDG.$$

De toutes ces proportions, on tirera ſix équations & autant de conditions pour l'équilibre, avec leſquelles on déterminera le rapport des tenſions de deux cordons, indépendamment des forces E, F, G, ou celui de deux forces indépendamment des tenſions de deux cordons, &c.

176. La même choſe auroit encore lieu, quand bien même les cordons EB, FC, DG ſuivant leſquels agiſſent les forces E, F, G, ſeroient ſitués dans différents plans. Et comme il pourroit arriver qu'il y eût pluſieurs puiſſances appliquées à la fois à un même point B de la corde, il faudroit alors calculer leur réſultante, & les conſidérer comme une ſeule & unique puiſſance qui agiroit ſur ce point : auquel cas les conditions de l'équilibre ſe trouveroient de la même maniere.

177. Mais arrêtons-nous encore un moment ſur la machine funiculaire *A B C D H*. La puiſſance *F* repréſentée par *CF'* ſe décompoſe en deux autres *Cb*, *Cd* dans le prolongement des cordons *B C* & *D C* dont elles expriment les tenſions. L'effort *Cb* ſe communique en *B*, & agit conjointement avec la puiſſance *E*, de maniere que leur réſultante dirigée ſuivant *B K* eſt employée à tendre le cordon *BA*, ou à charger l'appui *A*, ou ſi on aime mieux, à faire équilibre avec la puiſſance *A*. La tenſion de ce cordon peut par conſéquent exprimer la réſultante des deux puiſſances *E* & *C b*.

On pourra exprimer de même par la tenſion du cordon *D H* la réſultante des forces *G* & *C d*; donc la réſultante des quatre puiſſances *E*, *C b*, *C d*, *G* ou des trois *E*, *F*, *G* eſt abſolument la même que celle des tenſions des deux cordons extrêmes *A B*, *D H*; elle paſſe donc par le point de concours *K* de ces deux cordons. Et en général,

178. *Quels que ſoient le nombre & la direction des puiſſances appliquées à une même corde, leur réſultante paſſe toujours par le point de concours des deux cordons extrêmes.*

Lorſque ces puiſſances agiſſent dans le même ſens, & qu'elles ſont paralleles, leur réſultante eſt égale à leur ſomme, & leur eſt parallele. Soit donc une corde peſante attachée en *A* & en *B*, qui dans l'état d'équilibre prenne la courbure *A E B*. Soient *A C*, *B C* les deux tangentes en *A* & *B*; la réſultante des charges des deux appuis paſſera par le point de concours *C* des deux tangentes; ſa direction ſera

Fig. 76.

repréſentée

repréſentée par une ligne verticale CE, & ſa valeur ſera le poids même de la corde, c'eſt-à-dire, la ſomme des puiſſances qui ſollicitent chacun de ſes points. Appellant donc A & B les charges de ces deux appuis, & P le poids de la corde, on aura

$$P : \text{ſin}\, ACB :: A : \text{ſin}\, ECB :: B : \text{ſin}\, ACE.$$

179. Au lieu de l'appui B, on peut concevoir une puiſſance qui tranſmettroit ſon action au point A par l'entremiſe de la corde BEA; & dans ce cas, l'action de la puiſſance B, ſi elle agiſſoit immédiatement ſur le point A, doit être à l'action qu'elle lui communiqueroit par la corde peſante AEB, comme le ſinus de l'angle ACE eſt au ſinus de l'angle ECB. Il eſt donc facile d'avoir égard à la peſanteur des cordes, dans la communication des puiſſances.

180. Quand les deux points A & B ſont dans la même horizontale, la puiſſance B tranſmet toute ſon action au point A; mais lorſque B eſt plus élevé, la puiſſance qui lui eſt appliquée, perd une partie de ſes forces dans la communication qu'elle en fait par le moyen de cette corde. C'eſt tout le contraire, lorſque le point A eſt au-deſſus du niveau; plus il eſt élevé, plus la puiſſance B acquiert de prépondérance; ce qui montre d'une maniere ſenſible comment avec des cordes peſantes on peut multiplier les forces, dans pluſieurs cas.

REMARQUE.

181. Nous avons déja dit qu'il n'étoit pas poſſible à la rigueur de tendre horizontalement une corde, de maniere

qu'elle n'eût aucune inflexion. La preuve en est fort aisée, d'après ce que l'on vient de voir. Soit T la force qui tend des
Fig. 77. deux côtés la corde AEB, dont le poids sera représenté par P; on aura

$$T : P :: \sin ACD : \sin ACB.$$

Donc si l'angle ACB est infiniment obtus, c'est-à-dire, si la corde est parfaitement bandée, le sinus de l'angle ACD sera égal à l'unité, pendant que celui de l'angle ACB sera égal à zéro. Il faudroit donc une tension infinie, pour que la corde n'eût pas la moindre inflexion. Tant que la force employée à la tendre sera finie, l'angle CAB sera fini aussi.

L'angle ACB étant double de l'angle ACD, on a $\sin ACB = 2\sin ACD \cos ACD = 2\sin ACD \sin CAD$; donc $T.\ 2\sin CAD = P$. Supposons que la puissance T soit très-grande, eu égard au poids de la corde, AD ne différera pas sensiblement de AE, ni DE de EC; appellant donc L la longueur de la corde, on aura $\sin CAD = \frac{CD}{AC} = \frac{2DE}{\frac{1}{2}L}$, ce qui donne $2T.\ \frac{2DE}{\frac{1}{2}L} = P$, & $DE = \frac{PL}{8T}$.

182. *Connoissant donc la longueur* L *de la corde, son poids* P, *& la force* T *qui sert à la tendre, on pourra toujours déterminer la quantité dont elle baissera dans son milieu.*

Exemple.

Etant donné un poids de 5℔ pour tendre une corde de 24 pieds, que l'on suppose peser $161\frac{1}{4}$ grains, on demande quelle doit être son inflexion?

Après avoir décomposé 5℔ en 5 . 16 . 8 . 72 grains, on

aura $DE = \frac{161\frac{5}{6} \cdot 24}{5 \cdot 16 \cdot 64 \cdot 72} = \frac{485,5}{5 \cdot 16 \cdot 8 \cdot 72} = \frac{48,55^{\text{pi.}}}{64 \cdot 72} = \frac{48,55^{\text{po.}}}{64 \cdot 6} = \frac{48,55^{\text{lig.}}}{32} =$ 1 lig. $\frac{1}{2}$. Cette corde baiſſera donc dans ſon milieu d'une ligne & demie. L'expérience donne le même réſultat, quand on la fait ſur une corde dont trente-trois diametres égalent deux pouces.

De la courbure que les Cordes ſont obligées de prendre dans l'équilibre, par l'action des puiſſances.

[182. Lorſqu'une corde, ou une chaîne très-flexible ABD eſt ſuſpendue par ſes deux extrémités A & D, & qu'elle eſt ſollicitée en chacun de ſes points par des forces quelconques ſituées dans le même plan que les points de ſuſpenſion, il eſt hors de doute qu'elle doit prendre une certaine courbure propre pour l'équilibre. Mais quelle ſorte de courbure doit-elle affecter ? c'eſt ce que nous allons examiner dans cet article. * Fig. 78.

Commençons d'abord par rapporter les différents points de la courbe cherchée à un axe quelconque AC, & prenons les trois éléments conſécutifs Mm, mm', $m'm''$. Remarquons enſuite que la corde étant ſuppoſée en équilibre, on peut regarder comme fixes les deux points M & m', pendant que le point intermédiaire m ſera ſollicité par des forces quelconques dont on repréſentera la réſultante par R ou mr.

Cela poſé, pour que cette puiſſance faſſe équilibre aux tenſions des deux cordons Mm, mm', il faut qu'on ait (175)

$R : T, mm' :: \mathit{fin}\, M m m' : \mathit{fin}\, M m t$. Pareillement si on considere les points m, m'' comme fixes, pendant que le point intermédiaire m' sera sollicité par sa force $m't'$, qui est $R + dR$, ou pour abréger R', il faudra qu'on ait $T, m m' : R' :: \mathit{fin}\, t'm'm'' : \mathit{fin}\, m\, m'm''$. Multipliant donc ces deux proportions terme à terme, on aura

$$R : R' :: \mathit{fin}\, M m m' . \mathit{fin}\, t'm'm'' : \mathit{fin}\, M m t : \mathit{fin}\, M m'm''.$$

Soit maintenant $\varphi =$ l'angle $M m m'$, & $\mu = M m t$, on aura pour l'élément suivant $m m'm'' = \varphi + d\varphi = \varphi'$ pour abréger, & $M m't' = \mu'$. Donc $\mathit{fin}\, t'm'm'' = - \mathit{fin}\,(\mu' + \varphi')$ $= - \mathit{fin}\, \mu' \mathit{cof}\, \varphi' - \mathit{fin}\, \varphi' \mathit{cof}\, \mu'$. Mais φ' approche infiniment de $180°$, donc $\mathit{cof}\, \varphi = -1$; donc $R : R' :: \mathit{fin}\, \varphi\, \mathit{fin}\, \mu' - \mathit{fin}\, \varphi\, \mathit{fin}\, \varphi' \mathit{cof}\, \mu' : \mathit{fin}\, \mu\, \mathit{fin}\, \varphi' :: \frac{\mathit{fin}\, \mu'}{\mathit{fin}\, \varphi'} - \mathit{cof}\, \mu' : \frac{\mathit{fin}\, \mu}{\mathit{fin}\, \varphi}$; ce qui mene à l'équation suivante,

$$\frac{R' \mathit{fin}\, \mu'}{\mathit{fin}\, \varphi'} - \frac{R\, \mathit{fin}\, \mu}{\mathit{fin}\, \varphi} - R' \mathit{cof}\, \mu' = 0$$

que l'on peut changer en celle-ci, $d\left(\frac{R\, \mathit{fin}\, \mu}{\mathit{fin}\, \varphi}\right) - R' \mathit{cof}\, \mu' = 0$, ou bien encore en cette autre, $d\left(\frac{R\, \mathit{fin}\, \mu}{\mathit{fin}\, \varphi}\right) - R\, \mathit{cof}\, \mu = 0$, à cause de $R' \mathit{cof}\, \mu' = R\, \mathit{cof}\, \mu + d\,(R\, \mathit{cof}\, \mu)$, expression dont le dernier terme s'évanouit devant celui qui le précede immédiatement.

Comme les diverses puissances appliquées aux points de la corde, peuvent être réduites à deux, l'une mq dans la direction de l'ordonnée mp, l'autre ms parallele à l'abscisse Ap, appellons Y la premiere, X la seconde, & faisons à l'ordinaire $AP = x$, $PM = y$, $Mr = dx$, $mr = dy$, $Mm = ds$. Nous aurons $\mathit{fin}\, \mu = \mathit{fin}\,(M m r + t m q) = \mathit{fin}\, M m r\, \mathit{cof}\, t m q$

$+ cos Mmr\ sin\ tmq = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{Y}{tm} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{X}{tm}$, & $cos \mu =$ $cos Mmr\ cos\ tmq - sin\ Mmr\ sin\ tmq = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{Y}{tm} - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{X}{tm}$. Donc $R\, sin\, \mu = \frac{Ydx + Xdy}{ds}$, & $R\, cos\, \mu = \frac{Ydy - Xdx}{ds}$. Nommons r le rayon osculateur, l'angle de contingence ou son sinus $= \frac{ds}{r} = sin\, \varphi$, & nous aurons pour l'équation de la courbe cherchée,

$$d\left(\frac{(Ydx + Xdy)r}{ds^2}\right) + \frac{Ydy - Xdx}{ds} = 0.$$

Or cette équation étant différentielle du troisieme ordre, il faudra l'intégrer trois fois de suite, ce qui produira dans l'équation finie trois constantes que l'on déterminera de maniere que la courbe passe par deux points donnés, & qu'elle ait la longueur donnée.

Exemple.

182. Supposons que la pesanteur seule agisse sur tous les points de la corde *ABD* suivant les directions paralleles aux ordonnées *PM*. On demande quelle sera sa courbure ?

L'action de la pesanteur tend à communiquer à l'élément *Mm* la vîtesse g & la quantité de mouvement $g\, ds$. Ainsi $Y = g\, ds$, & $X = 0$, ce qui réduit l'équation générale à celle-ci $d\left(\frac{rdx}{ds}\right) + dy = 0$; dont l'intégrale est $\frac{rdx}{ds} = C - y$. Mais si on suppose ds constante, on a $r = \frac{dyds}{ddx}$; donc $\frac{ddx}{dx} - \frac{dy}{C - y} = 0$, qui a pour intégrale $l\,dx + l(C - y) = l\,C'ds$, ou $dx\,(C - y) = C'ds$. Elevant au quarré, $dx^2 (C - y)^2 = C'^2 ds^2 = C'^2 dx^2 + C'^2 dy^2$, & séparant on a enfin

$$dx = \frac{\pm C'dy}{\sqrt{(C - y)^2 - C'^2}}.$$

pour l'équation différentielle de la courbe formée naturellement par une corde ou une chaîne très-flexible que l'on auroit suspendue par les deux extrémités. Cette courbe est généralement connue sous le nom de *Chaînette* ou *Caténaire*.

Fig. 79. Si on fait $dy = 0$, on aura le point B, le plus bas de la courbe, alors $C - y = C'$, ou $y = BE = C - C'$; & si on veut rapporter la chaînette à l'axe vertical BE, on menera une ordonnée MQ à cet axe, & on posera $BQ = x$, $QM = y$; ainsi dans l'équation précédente, il faudra changer y & x en $C - C' - x$, & en $AF - y$, ce qui donnera $dy = \frac{\pm C'dx}{\sqrt{(xx + 2C'x)}}$. Mettant donc a au lieu de C', & intégrant, il viendra $y = \pm l. \frac{a + x + \sqrt{(xx + 2ax)}}{a}$; d'où on conclura qu'à chaque abscisse x répondent de part & d'autre de l'axe BE deux ordonnées égales. Cet axe est donc un diametre de la courbe.

Prenant les x positives, on voit que les y croissent à l'infini : mais lorsqu'on prend des abscisses négatives, les ordonnées deviennent imaginaires. Ainsi la chaînette ne s'étend pas au-delà du sommet B, & on peut assimiler sa figure à celle de la parabole. D'ailleurs elle se confond au point B avec une courbe parabolique dont le parametre est $2a$; ce qui justifie ce que nous avons fait (181) en prenant $DE = EC$, dans la Fig. 77.

L'équation différentielle $dy = \frac{adx}{\sqrt{(2ax + xx)}}$ donne $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{(x + a)dx}{\sqrt{(2ax + xx)}}$, dont l'intégrale est $BM = \sqrt{(2ax + xx)}$. Ainsi la chaînette est susceptible de rectification.

Quand on connoît les deux points de ſuſpenſion *A* & *D* avec la longueur de la corde, il faut, pour décrire la chaînette, connoître la poſition du ſommet *B* & la quantité *a*. On aura donc autant d'équations que d'inconnues : mais on ne pourra les réſoudre que par approximation à cauſe des quantités logarithmiques qui entreront dans l'équation de la courbe.

183. Quand une corde ſuſpendue à deux points, n'a pas la figure que l'on vient de voir, elle ne peut reſter en équilibre. Il faut abſolument qu'elle faſſe des oſcillations continuelles, juſqu'à ce que le frottement, & la réſiſtance de l'air la forcent enfin de reſter en équilibre.

Ce fut Galilée qui chercha le premier la courbe que forme une chaîne tendue par ſon propre poids : mais toutes ſes recherches ſe bornerent à conjecturer que c'étoit une parabole, la Géométrie de ſon temps n'ayant pû lui ſuffire pour réſoudre ce problême. Les MM. Bernoulli l'attaquerent de nouveau, à la naiſſance du calcul différentiel, & on peut voir dans leurs ouvrages avec quel ſuccès ils le réſolurent.

184. Parmi pluſieurs belles propriétés de la chaînette, que ces ſavants Géometres déduiſirent de leurs calculs, il en eſt une plus analogue que les autres au ſujet que nous traitons. Elle conſiſte en ce que le centre de gravité de la caténaire deſcend le plus bas qu'il eſt poſſible. Voici comment on peut la démontrer.

Soit *G* le centre de gravité de l'arc *AMBD*, *GG'* ſa diſtance à l'horizontale *AE*; il faut prouver que cette diſ- Fig. 79.

tance eſt un *Maximum*. Or $GG' = \frac{\int y\,ds}{ABD}$, & l'arc ABD eſt d'une longueur donnée ; toute la difficulté ſe réduit donc à prouver que dans la caténaire l'expreſſion $\int y\,ds$ eſt un *Maximum*.

Telle eſt la nature d'un *Maximum* quelconque, qu'en ſuppoſant une variation infiniment petite dans les quantités qui le produiſent, ſa valeur ne doit pas changer. Si on fait donc varier infiniment peu un point M' de la courbe propoſée, la valeur du *Maximum* ne changera pas, quoique les éléments contigus MM', $M'M''$ ſoient affectés de cette variation. Or cette condition une fois exprimée, il s'enſuivroit que l'arc de la courbe eſt demeuré conſtant : mais pour exprimer d'une maniere plus particuliere, cette invariabilité & celle du *Maximum*, il faudra faire varier un autre point M''.

Cependant pour que la fluxion de chaque point n'entraîne qu'une indéterminée, il faut ſuppoſer que cette fluxion ſe fait ſur une ligne donnée. Or cette ligne étant abſolument arbitraire, nous ſuppoſerons que la fluxion des points M', M'' ſe fait ſur les paralleles à l'axe $M'R'$, $M''R''$, afin que le calcul ſoit plus ſimple. Cela poſé, les ordonnées ne changeront pas de valeur, non plus que leurs différences RM', $R'M''$.

Mais lorſqu'on prend pluſieurs éléments conſécutifs d'une même courbe, la fonction F qui convient au premier élément ſe change en $F + dF$ pour le ſecond, & $F + dF$ devient à ſon tour $F + dF + d(F + dF)$ pour le troiſieme ; & ainſi de ſuite. Ces différentes valeurs de F pour chaque élément conſécutif de la courbe feront déformais repréſentées par

F, F', F''

F, F', F'' &c, uniquement pour abréger. On aura donc $F' = F + dF$, $F'' = F' + dF'$ &c, d'où $F' - F = dF$, $F'' - F' = dF'$, &c.

On aura enſuite $MP = y$, $M'P' = y'$, $M''P'' = y''$ &c...... $AP = x$, $AP' = x'$, $AP'' = x''$, &c, ce qui donne $PP' = dx$, $P'P'' = dx'$, $P''P''' = dx''$, &c... $M'R = dy$, $M''R' = dy'$, &c. $MM' = ds$, $M'M'' = ds'$, &c... Enfin telle eſt la condition du problême que $\int y\,ds$ doit être un *Maximum*, qui ne reçoit aucun changement par la fluxion des points M', M''. Or $\int y\,ds$ exprime la ſomme des $y\,ds$ dans toute l'étendue de la courbe depuis A juſqu'en D; & cette ſomme ne varie pas depuis A juſqu'en M, ni depuis M''' juſqu'en D; donc ſi elle avoit à varier, ce ne pourroit être qu'entre M & M''' où ſa valeur eſt $y\,ds + y'ds' + y''ds''$. La différentielle de cette quantité doit donc être zéro.

Mais comme il s'agit ici de différentielles dépendantes de la fluxion des points M', M'', leſquelles n'ont aucun rapport avec les différences naturelles, c'eſt-à-dire, avec les différentielles des coordonnées & de l'arc, nous les diſtinguerons par la caractériſtique δ: ainſi nous aurons $y\,\delta ds + y\,\delta ds' + y''\delta ds'' = 0$, puiſque y, y', y'' ne varient pas.

L'arc de la courbe, $ds + ds' + ds''$ eſt conſtant; donc $\delta ds + \delta ds' + \delta ds'' = 0$. Pareillement l'intervalle PP''' dont l'expreſſion eſt $dx + dx' + dx''$, eſt conſtant; donc $\delta dx + \delta dx' + \delta dx'' = 0$. Mais on a $dx^2 + dy^2 = ds^2$; donc $dx\,\delta dx + dy\,\delta dy = ds\,\delta ds$: & puiſque $\delta dy = 0$, on aura $\delta dx = \frac{ds}{dx}\delta ds$; d'où on tirera les trois équations ſuivantes,

S

$$y\delta ds + y'\delta ds' + y''\delta ds'' = 0$$
$$\delta ds + \delta ds' + \delta ds' = 0$$
$$\frac{ds}{dx}\delta ds + \frac{ds'}{dx'}\delta ds' + \frac{ds''}{dx''}\delta ds'' = 0.$$

La premiere eſt la même que $(y - y')\delta ds + (y' - y'')(\delta ds + \delta ds') + y''(\delta ds + \delta ds' + \delta ds'') = 0$, & par la ſeconde, elle ſe réduit à $dy\delta ds + dy'(\delta ds + \delta ds') = 0$. La ſeconde & la troiſieme donneront de même $d\left(\frac{ds}{dx}\right)\delta ds + d\left(\frac{ds'}{dx'}\right)(\delta ds + \delta ds') = 0$; & on conclura enfin de ces deux dernieres $\frac{d\left(\frac{ds'}{dx'}\right)}{dy'} - \frac{d\left(\frac{ds}{dx}\right)}{dy} = 0$; ou $d\left[\frac{d\left(\frac{ds}{dx}\right)}{dy}\right] = 0$; & en intégrant on aura $Cd\left(\frac{ds}{dx}\right) + dy = 0$: intégrant de nouveau, il viendra $\frac{Cds}{dx} + y = C'$, équation de la chaînette, telle que nous l'avons déja trouvée (182). Donc le centre de gravité de la chaînette deſcend le plus bas qu'il lui eſt poſſible.

Remarquez que $\int y\,ds$ étant ici un *Maximum*, on doit en conclure qu'entre toutes les courbes iſopérimetres, terminées par les deux mêmes points *A* & *B*, la caténaire eſt celle qui, par ſa révolution autour de l'axe horizontal *AC*, engendreroit la plus grande ſurface courbe.

Exemple II.

185. On ſuppoſe que la gravité agit ſuivant des directions qui tendent toutes à un même centre, & on demande
Fig. 80. la courbure que doit prendre alors une corde *AD* ſollicitée dans tous ſes points par l'action de la peſanteur ?

Soit menée par le point de ſuſpenſion A au centre des forces C la droite AC, & d'un point quelconque M de la courbe cherchée, tirez ſur cette droite la perpendiculaire MQ; après quoi vous completterez le rectangle $APMQ$, & faiſant $CQ = x$, $QM = y$, $CM = z$, vous verrez que ce qui étoit x & y dans l'équation générale, devient ici y & $AC - x$; ainſi cette équation ſe changera en

$$d\left(\frac{(Ydy - Xdx)r}{ds^2}\right) = \frac{Ydx + Xdy}{ds}.$$

Soit F la vîteſſe communiquée par la force centrale, laquelle eſt une fonction de z, la quantité de mouvement de l'élément ds ſera $Fds = MO$, qui étant décompoſée en deux autres MS, MT ſuivant les lignes MQ & PM, donnera $z : Fds :: x : MT = \frac{Fxds}{z} = Y : MS = \frac{Fyds}{z} = X$.

Subſtituant ces valeurs dans l'équation générale, on aura $d\left[\frac{Fr}{zds}(xdy - ydx)\right] = \frac{F}{z}(xdx + ydy) = Fdz$. L'intégrale eſt $\frac{Fr}{zds}(xdy - ydx) = \int Fdz$. Or en ſuppoſant conſtante $mr = zd\varphi = du$, on a le rayon oſculateur $r = \frac{zds^3}{(-ds^2 + zddz)du}$, & en faiſant l'angle $ACM = \varphi$, il vient $xdy - ydx = zzd\varphi$; valeurs qui étant ſubſtituées donneront $\frac{Fzds^2}{-ds^2 + zddz} = \int Fdz$, ou $\frac{F}{\int Fdz} + \frac{1}{z} = \frac{ddz}{du^2 + dz^2}$. Multipliant par dz, on a $\frac{Fdz}{\int Fdz} + \frac{dz}{z} = \frac{dzddz}{du^2 + dz^2}$, dont l'intégrale eſt $l\int Fdz + lz = \frac{1}{2}l(du^2 + dz^2) - l\frac{du}{C}$, ou $z\int Fdz = \frac{Cds}{du} = C\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{z^2d\varphi^2}\right)}$. Séparant donc, on aura $d\varphi = \frac{\pm Cdz}{z\sqrt{[z(\int Fdz)^2 - C^2]}}$, pour l'équation différentielle de la chaînette, dans le cas où la gravité agit ſuivant des

directions convergentes vers le centre des forces.

Mais pour faire une application de ce résultat général, suppofons que $F = \frac{bC}{azz}$, c'eft-à-dire, que la gravité agiffe en raifon inverfe du quarré de la diftance, nous aurons $\int F dz = \frac{-bC}{az} + \frac{C}{a}$; donc $d\varphi = \frac{\pm dz}{z\sqrt{[(z-b)^2 - a^2]}}$; équation que l'on intégrera, en la rendant rationnelle. Mais comme b peut être plus grand ou plus petit que a, il y aura deux cas à examiner. Soit donc B le point le plus bas de la courbe, foit $CB = c$, & l'angle $BCM = \varphi$, on aura, dans le premier cas l'intégrale $\varphi = \pm \frac{m^2-1}{m} l. \frac{\sqrt{\left(m^2 - \frac{c}{z}\right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{c}{z}\right)}}{\sqrt{(m^2-1)}}$; & dans le fecond, $\frac{c}{z} = \frac{1-m^2}{2} + \frac{1+m^2}{2} \cos \frac{2m}{1+mm}\varphi$. Si m eft un
* nombre entier, la courbe fera algébrique dans le dernier cas.]

DU LEVIER.

Fig. 81. 186. Le levier eft une verge inflexible PCQ appuyée fur un point C, autour duquel elle peut fe mouvoir librement. Nous ferons d'abord abftraction de fa pefanteur, afin de fimplifier fa théorie.

Soient deux puiffances A & B appliquées aux deux extrémités P & Q d'un levier PCQ de figure quelconque, & foit propofé de trouver les conditions de l'équilibre dans cette machine.

On prolongera les directions AP & BQ de ces deux puiffances jufqu'au point de concours E où elles feront cenfées agir conjointement. Et alors repréfentant par EF l'action

de la force A, par EG celle de la force B, on aura la diagonale EH pour leur résultante, que l'on voit bien ne pouvoir être détruite, si elle n'est pas dirigée vers le *point d'appui C*. Soit donc C la *charge* de l'appui, représentée par EH, on aura pour l'équilibre,

$$C : A : B :: EH : EF : EG :: \sin PEQ : \sin CEQ : \sin CEP.$$

187. Puisque la résultante des puissances A & B passe par le point d'appui C, la somme des moments par rapport à ce point doit être zéro (57). Menant donc les perpendiculaires CM, CN du point C sur les directions AP, BQ, on aura $A \cdot CM = B \cdot CN$, ce qui peut également se déduire de la proportion $A : B :: \sin CEQ : \sin CEP$. Et delà on conclura généralement la condition fondamentale de l'équilibre dans le levier.

Pour que deux puissances appliquées aux deux extrémités d'un levier se fassent équilibre, il faut que leurs moments soient égaux, ou ce qui revient au même, *il faut que chaque puissance soit réciproquement comme la perpendiculaire menée du point d'appui sur sa direction.*

188. Quelques soient alors les puissances appliquées au levier, la résultante passera toujours par le point d'appui, & par conséquent la somme des moments des puissances qui tendent à faire tourner le levier dans un sens, est égale à la somme des moments de celles qui tendent à le faire tourner en sens contraire, les moments étant pris par rapport au point d'appui.

189. Si les deux puissances, ou les deux poids A & B Fig. 82.

ont des directions paralleles, alors les perpendiculaires CM, CN se trouveront dans une même ligne MN; & si de plus le levier est droit, ses deux *Bras* CP, CQ seront proportionnnels aux lignes CM, CN. On aura donc pour l'équilibre, $A . CP = B . CQ$; ainsi *pour que deux poids soient en équilibre dans un levier droit, ils doivent être en raison inverse des bras auxquels ils sont suspendus.*

Donc si le bras CP est double du bras CQ, un poids A d'une livre fera équilibre au poids B de deux livres. Mais on voit bien que si on ajoutoit un même poids aux deux autres, l'équilibre ne pourroit plus subsister. Le seul moyen de le maintenir alors, seroit d'ajouter à B le double de ce qu'on ajouteroit au poids A; d'où il suit qu'en prenant un levier d'une longueur convenable, on peut mettre en équilibre les poids les plus inégaux.

190. Si au lieu du poids A, on imaginoit une puissance qui fit équilibre au poids B, on pourroit alors considérer dans un levier trois choses différentes, au moins quant au nom, savoir la puissance, le poids que l'on appelle aussi la résistance, & le point d'appui. Ces trois choses cependant ne sont au fond que trois puissances différentes dont les deux premieres unissent leurs efforts contre le point d'appui qui tient lieu de la troisieme, & qui détruit leur résultante.

Mais quoi qu'il en soit, on a coutume de distinguer trois especes de levier, relativement à la position du poids, de la puissance & du point d'appui; & on appelle levier du premier genre, celui où le point d'appui se trouve entre la

puiſſance & le poids ; levier du ſecond genre, celui où le poids eſt entre l'appui & la puiſſance ; levier du troiſieme genre, celui où la puiſſance eſt entre le poids & l'appui.

Dans le premier cas, la puiſſance peut avoir de l'avantage ou du déſavantage ſur le poids, ſelon que le bras auquel elle eſt appliquée, eſt plus ou moins long que le bras qui ſoutient le poids. Dans le ſecond cas la puiſſance eſt toujours favoriſée ; dans le troiſieme, elle a toujours du déſavantage.

191. Lorſqu'on veut ſoutenir une maſſe M, une groſſe pierre, par exemple, on prend ordinairement un levier dont on fait paſſer une petite partie CP au-deſſous de la pierre ; & alors le point C étant appuyé ſur le terrein, la puiſſance Q agit avec d'autant plus d'efficacité, que le bras CQ auquel elle eſt appliquée, ſe trouve plus long que la partie CP. Ceux qui diſtinguent trois ſortes de levier, regardent celui-ci comme appartenant à la ſeconde eſpece. FIG. 86.

192. Mais lorſqu'un homme ſoutient un poids au bout de ſon bras étendu horizontalement, le levier qu'il emploie eſt du troiſieme genre, parce que les muſcles qui tiennent alors lieu de la puiſſance, ſe trouvent entre le point d'appui & le poids. Or dans un adulte de conſtitution moyenne, la longueur du bras eſt à la diſtance du muſcle Deltoïde au point d'appui, comme 100 eſt à 3 ; donc un poids de 30℔ ne peut être ſoutenu dans cette poſition, que par un effort de 1000℔. On ne doit donc pas être ſurpris de la difficulté que l'on éprouve, à porter ainſi des fardeaux un peu lourds.

Il ſembleroit d'abord que tout autre arrangement eût été

plus favorable à l'action de nos muſcles ; mais en conſidérant les choſes de plus près, on voit qu'il n'y a pas de genre de levier plus propre que le troiſieme à produire de grands mouvements dans les poids que l'on ſouleve ; & s'il faut de plus grandes forces pour les produire, avec quelle intelligence, mais en même temps avec quelle économie l'Auteur de la Nature n'y a-t-il pas pourvu ! *Voyez* Borelli, *de motu Animalium*, & Nieuwentyt, *Exiſtence de Dieu démontrée par les merveilles de la Nature.*

193. Mais encore une fois, ces trois ſortes de levier ſe réduiſent à une ſeule, parce qu'au fond rien n'empêche de conſidérer indifféremment le poids, la puiſſance, & la charge de l'appui, comme trois puiſſances différentes dont deux luttent contre la troiſieme. Et quand une fois l'équilibre eſt établi entr'elles, qu'eſt-ce qui pourroit empêcher

Fig. 82. auſſi de regarder l'un quelconque des trois points P, C, Q comme l'appui du levier, puiſqu'ils ſont tous fixes ?

Nous ſavons, par exemple, que la charge de l'appui C eſt exprimée par $A+B$; on peut donc la regarder comme une puiſſance qui agit de bas en haut, & qui fait équilibre à la puiſſance Q, ſur le levier PCQ dont l'appui eſt en P : & alors on a pour la condition de l'équilibre, $(A+B)\ PC = B\ .\ PQ$, d'où on tire également $A\ .\ CP = B\ .\ CQ$, comme nous l'avons déja trouvé.

Fig. 83. 194. Si un levier BA appuyé par les deux extrémités A & B ſe trouve chargé en C par un poids quelconque M, on voit bien que pour avoir la charge des deux appuis, il faut

faut décompofer la puiffance M en deux autres, qui foient paralleles entr'elles, & qui paffent l'une par le point A, l'autre par le point B. Celle qui paffera par A aura pour valeur $\frac{BC}{AB}M$, & l'expreffion de celle qui paffera par B fera $\frac{AC}{AB}M$.

195. Veut-on maintenant avoir égard à la pefanteur du levier? On la regardera comme une nouvelle puiffance dont tout l'effort réuni au centre de gravité s'exerce perpendiculairement à l'horizon; d'où il fuit qu'on ne doit pas avoir égard à la pefanteur d'un levier, dont le centre de gravité répond au point d'appui.

Mais fuppofons que les deux puiffances A & B foient paralleles & verticales, & que G foit le centre de gravité du levier PCQ, de maniere que tout fon poids L agiffe verticalement, fuivant la ligne GL: en menant alors une droite quelconque $MCIN$, nous aurons pour condition de l'équilibre, $B.CN + L.CI = A.CM$. FIG. 84.

196. Etant donné un levier PCQ, fon poids L, & les puiffances A & B appliquées à fes deux extrémités, on trouvera le point d'appui C fur lequel doit fe faire l'équilibre, en imaginant une droite quelconque $mcin$, qui coupe en m, i, n les perpendiculaires PA, IL, QB données de pofition. Car alors on aura $B.cn + L.ci = A.cm$; & fubftituant $ci + in$ au lieu de cn, & $im - ic$ au lieu de cm, on trouvera $B.ci + B.in + L.ci = A.im - A.ic$; donc $ic = \frac{A.im - B.in}{A+B+L}$. Ayant ainfi déterminé le point c, on menera par ce point une verticale cC qui coupera le levier au point d'appui C que l'on cherche.

197. Considérons à présent un levier du second genre,
Fig. 85. CPQ, que nous supposerons droit & uniformément pesant. Soit la longueur $CQ = a$, la partie $CP = b$, & sa gravité spécifique $= g$. On aura donc ga pour l'expression de son poids total L, qui est censé agir en I milieu de CQ, & par conséquent on aura pour l'équilibre, $Ba = bA + \frac{1}{2}gaa$, ou $B = \frac{bA}{a} + \frac{1}{2}ga$. Si a est très-petit, la puissance B sera fort grande, & si au contraire a est très-grand, la même puissance B sera encore fort grande ; il y a donc entre ces deux extrêmes une telle valeur à donner à B, que l'on ne puisse pas lui en supposer une moindre, pour obtenir l'équilibre.

Pour la trouver, on différenciera l'expression générale de B en faisant varier a, & on aura $\frac{1}{2}g\,da - \frac{bA\,da}{aa}$, qui étant divisée par da & égalée à zéro donne $\frac{1}{2}g = \frac{bA}{aa}$; d'où on tire aussi-tôt $a = \sqrt{\frac{2bA}{g}}$, ensuite $\frac{bA}{a} = \frac{1}{2}ga$, & par conséquent $ga = \sqrt{2bAg}$. Connoissant donc le poids A, la distance CP à laquelle il se trouve appliqué, & la gravité spécifique g du levier, on déterminera immédiatement la plus petite force B que l'on puisse employer pour l'équilibre, en calculant la formule $B = \sqrt{2bAg}$; & la longueur nécessaire du levier sera déterminée par la formule....... $a = \sqrt{\frac{2bA}{g}}$.

Exemple.

On suppose que $CP = 3$ pouces, que la masse A pese 200℔, & que la gravité spécifique du levier, ou généralement ce que pese un de ses pouces est $\frac{1}{2}$℔. Alors $CQ =$

$a = \sqrt{2400} = 49$ pouces $= 4$ pieds 1 pouce, & $B\sqrt{600} = \frac{49}{2}$℔ $= 24$℔ 8 onces. Il faut donc pour ce cas un levier de 4 pieds 1 pouce de longueur, & une puiſſance équivalente au poids de 24℔ 8 onces.

198. Lorſqu'on veut dreſſer une pierre M ſur ſa *vive arête* KL, en employant un levier du ſecond genre CPQ, il ne faut pas prendre pour B le poids entier de la pierre, parce qu'une partie de ce poids eſt ſoutenue par l'arête KL; mais pour déterminer ce qui tient lieu de B, on peut s'y prendre de la maniere ſuivante. Fig. 86.

Soit G le centre de gravité, & N le point ou la verticale menée par ce centre, rencontre la baſe $KLFG$: ſoit auſſi prolongée PN juſqu'à la ligne KL. Cela poſé, le poids M ſuivant GN ſe décompoſera en deux puiſſances qui paſſeront l'une par P, l'autre par T. La premiere aura pour valeur $\frac{NT}{PN}M$; mais comme elle n'eſt pas perpendiculaire au levier, il faudra la décompoſer à ſon tour en deux autres, dont l'une ſuivra la direction du levier, pendant que l'autre ſera perpendiculaire à cette même direction. En vertu de la premiere, on verroit gliſſer la pierre ſur le levier, ſi le frottement ne détruiſoit pas ſon effet; mais la ſeconde ſera réellement tout ce que l'on doit prendre pour B.

REMARQUE.

199. C'eſt ſur les principes que nous venons d'expoſer que ſont conſtruites les *Balances*. Il y en a de pluſieurs ſortes, mais toutes s'expliquent facilement en les ramenant au levier. Tout le monde connoît les balances ordinaires, qui

ne font autre chose qu'un levier mis en équilibre sur son milieu, & portant un *Bassin* à chaque extrémité.

Fig. 87. Le levier *A B* que l'on appelle aussi le *Fléau*, est la piece principale de cette machine. Ses deux bras *A X*, *B X* doivent être parfaitement égaux en longueur. On doit tâcher aussi de les rendre également pesants; mais cette condition est bien moins importante que la premiere pour la bonté d'une balance; parce qu'il est toujours fort aisé de compenser l'inégalité de leurs poids par ceux des bassins, au lieu que rien ne peut corriger l'erreur qui provient de l'inégalité de leur longueur.

Le fléau est traversé dans son milieu *X* par un *Axe S X* dont la partie supérieure est ronde, l'inférieure est tranchante. Cet axe traverse à son tour la *Châsse* ou *Anse S T X* par les deux trous *S*, *X* dans lesquels il doit être fort mobile. L'*Aiguille E* fait partie du fléau; elle est toujours perpendiculaire à sa longueur, & on la dispose de maniere qu'elle se trouve exactement dans le plan de la châsse, toutes les fois que le fléau est bien horizontal. Enfin à chaque extrémité du fléau est suspendu par trois cordons ou trois chaînes un bassin capable de contenir plus ou moins de marchandises ou de poids. Lorsque ces deux bassins sont vuides, il faut, si la balance est bonne, qu'elle reste en équilibre, & que l'aiguille ne s'incline d'aucun côté de la châsse.

Il seroit inutile d'insister sur les différents usages d'une machine aussi familiere. Personne, en général, n'ignore que pour peser une masse quelconque, on la place d'abord dans

un des deux baſſins, n'importe lequel, & qu'enſuite on charge l'autre d'autant de poids qu'il en faut pour établir l'équilibre, ce que la poſition verticale de l'aiguille indique bientôt. Le poids de la marchandiſe eſt toujours égal à la ſomme des contre-poids.

200. Une choſe cependant peut rendre très-défectueuſe cette premiere eſpece de balance, l'inégalité de ſes bras : car il eſt aiſé de compenſer la briéveté de l'un par l'excès du poids que l'on donne au baſſin qui s'y trouve ſuſpendu ; & alors les poids des deux baſſins étant en raiſon inverſe des longueurs des deux bras, l'équilibre aura lieu, ſans que l'on puiſſe toutefois compter ſur l'exactitude de la balance. Que l'on mette en effet de la marchandiſe dans le baſſin du plus long bras, il eſt clair qu'elle ſera équilibre à un poids plus grand que le ſien.

201. Mais on ſait que pour vérifier ces ſortes de balances, il ſuffit de faire paſſer reſpectivement d'un baſſin dans l'autre, le poids & la marchandiſe. On voit auſſi-tôt le poids déja trop fort acquérir de nouvelles forces par ſa ſuſpenſion au plus long bras, & par une ſubite prépondérance, faire diſparoître tout équilibre. Au reſte toute fauſſe que peut-être une pareille balance, elle ſerviroit également à déterminer les vrais poids des denrées, ſi après les avoir peſées dans les deux baſſins, on prenoit un moyen proportionnel géométrique entre le poids qui fait équilibre à la denrée dans un baſſin, & celui qui lui fait équilibre dans l'autre. Pour le démontrer, ſoit y le poids de la denrée, ſoit a ſon

contre-poids lorsqu'elle est suspendue au plus petit bras, que je suppose être AS; on aura donc $y \cdot AS = a SX$. Soit b le contre-poids de cette même denrée mise dans l'autre bassin, & on aura $y \cdot SX = b \cdot AS$; donc $yy \cdot AS \cdot SX = ab \cdot AS \cdot SX$, & $y = \sqrt{ab}$. Par exemple, si après avoir pesé la marchandise dans un bassin, on trouve qu'elle soit en équlibre avec un poids de 25℔, & qu'en la pesant dans l'autre bassin, le contre-poids soit de 26℔, on aura pour son poids véritable, 25℔ 7 onces 7 gros 26 grains.

202. La balance, telle que nous l'avons décrite, est fort commode sans doute, mais elle n'est pas sans quelques inconvénients. Un des plus grands, c'est que pour peser différentes marchandises, il faut se servir de différents poids; au lieu que dans la *Balance Romaine*, appellée aussi *Peson*, un seul poids suffit pour peser toutes sortes de marchandises. Autre inconvénient de la balance ordinaire, c'est que pour la rendre plus parfaite, il faut donner une certaine longueur à ses bras; mais alors ils sont plus sujets à se fléchir, ce qui les rend presque inutiles. Il faut aussi que le fléau puisse se mouvoir très-facilement, & pour cela il faut que son axe soit bien aigu : mais plus il est aigu, de quelque matiere qu'il puisse être, plus il est sujet à s'émousser; & quand une fois il a perdu son tranchant, la balance n'est plus aussi mobile, parce que le frottement est augmenté. Le frottement s'accroît encore par une autre cause, qui est la grandeur des poids dont on se sert. Delà vient qu'une balance assez sensible pour peser en petite quantité des matieres très-pré-

cieuses, comme l'or & les diamants, ne pourroit servir long-temps à cet usage, si on l'employoit à peser aussi des poids considérables.

Tant que le fléau est horizontal, le poids de l'aiguille porte sur l'axe de la balance : mais lorsque le fléau penche d'un côté, on voit bien que le poids de l'aiguille favorise celle des deux puissances qui a prévalu sur l'autre. Aussi a-t-on soin communément de n'employer que de petites aiguilles, & même de leur donner un petit contre-poids que l'on attache sous l'axe de la balance, afin qu'il tourne en sens contraire de l'aiguille.

Dans la construction des grandes balances, on doit préférer des chaînes de métal aux cordes, soit parce qu'elles résistent davantage, soit parce qu'elles sont moins exposées aux influences de l'humidité & de la sécheresse. Il faut aussi préférer les matieres les plus dures & les mieux polies pour en faire le fléau, ou tout au moins l'axe d'une balance solide & facile à se mouvoir. On peut au reste consulter sur cet objet les ouvrages de plusieurs Géometres, *Jac. Bernoulli opera vol. I... Euleri disquisitio de Bilancibus in Comm. Acad. Petrop. ad an.* 1738 *Tom. X... Lambert, Acta Helvetica. vol.* 3, &c.

203. Le peson est composé d'un levier ou fléau *A B* qu'il faut tâcher de rendre le plus mobile que l'on peut autour d'un axe *C*, par une suspension *à couteaux*. L'un des bras *C B* doit être beaucoup plus long que l'autre *C A*. Plus il y aura de différence à cet égard, plus les usages du peson seront étendus. Vers l'extrémité du petit bras on suf- Fig. 88.

pend un *plat* de balance propre à contenir des marchandises, ou on attache un *crochet* avec lequel on peut les soulever. Tout le long de l'autre bras doit glisser librement un poids quelconque F, que l'on y suspend par une espece d'anneau. Cela posé, le bassin étant vuide, on approche le poids F, du point d'appui ou du centre de mouvement C, jusqu'à ce qu'il y ait équilibre entre les deux parties du peson. Supposant alors que l'anneau H soit au point zéro marqué o sur le bras CB, il est clair que si on met un corps quelconque Q dans le plat de cette balance, l'équilibre sera rompu, jusqu'à ce qu'on ait suffisamment écarté du centre C le poids F: & quand on aura établi entr'eux l'équilibre que l'on souhaite, on verra que le moment $CA \cdot Q$ doit être égal au moment $F \cdot CH$, moins le moment $F \cdot Co$ de ce même poids F, parce qu'on l'a déplacé de cette premiere division en o. Donc $CA \cdot Q = F \cdot Ho$.

Or il suit de cette construction que si on divise la partie oB du levier en parties égales 01, 12, 23, 34, &c, dont la longueur soit celle du petit bras CA, le chiffre qui répondra au point où se trouvera l'anneau H, marquera le nombre de fois que le corps proposé Q contient le poids F. Par exemple, si ce poids, y compris celui de l'anneau, est d'une livre, & répond à la troisieme division, on conclura que le poids Q est de trois livres; & ainsi des autres. Pour peu que l'on veuille multiplier les divisions du levier CB, on aura la facilité de peser jusqu'aux moindres parties de la livre: mais pour les usages ordinaires, il suffit de partager en 16 parties

parties égales les intervalles déja fixés, afin de peser exactement les onces.

204. La balance Chinoise n'est autre chose qu'un peson adapté à un plus grand nombre d'usages. On s'en sert beaucoup à la Chine pour peser jusqu'aux plus petits morceaux d'or. Figurez-vous donc un petit bâton d'ivoire *A B*, dont l'extrémité *A* porte un bassin propre à contenir ce que l'on veut peser. Ce bâton est percé en *C*, de maniere qu'un cordon *C D* passant à travers y soit arrêté par un nœud. C'est par ce cordon que l'on soutient la balance, dont l'autre bras *C B* divisé en parties bien égales porte un contre-poids, que l'on éloigne du point fixe *C*, jusqu'à ce qu'il y ait équilibre. Mais afin de rendre plus commodes leurs balances, les Chinois en percent le fléau de deux autres trous *E*, *F*, pour pouvoir le suspendre successivement par trois différents points. Il y a une division particuliere pour chaque axe de suspension, & le bassin restant toujours au même bout de la balance, on écarte plus ou moins le contre-poids. Fig. 89.

Au lieu de le rendre mobile, on pourroit faire mouvoir le bassin, & ce nouveau peson serviroit également aux mêmes usages : mais, en général, il est plus aisé de manier le contre-poids, & on fatigue moins le plat de la balance. Fig. 90.

205. Les Méchaniciens se sont beaucoup exercés à inventer de nouveaux moyens de peser toute sorte de poids. Une des machines les plus ingénieuses qu'ils aient imaginées pour cet effet, consiste dans un quart de cercle *B D* solidement établi sur son pied *P* : au centre *C* se trouve un axe Fig. 91.

perpendiculaire au plan du quart de cercle, & autour de cet axe ſont diſpoſées trois poulies mobiles & concentriques 1, 2, 3, qui ont chacune un cordon de ſoie au bas duquel on peut attacher ſucceſſivement le baſſin. Les diametres de ces poulies ſont arbitraires : mais elles ſont toutes attachées à un même rayon *CM* fait de matiere un peu peſante, de maniere qu'elles ne peuvent tourner, ſans que cette eſpece d'aiguille ne tourne auſſi. Le cordon attaché à la plus grande poulie ſert à peſer les moindres poids. Les deux autres ſervent par gradation à peſer des maſſes plus conſidérables.

C'eſt le centre de gravité *G* de l'aiguille *CM* qui fait les fonctions de puiſſance. Suppoſons en effet que le baſſin étant vuide, *CM* réponde au point o ; il eſt clair que ſi on charge le baſſin, l'équilibre ſe rompra, en faveur de ce que l'on peſe ; le baſſin deſcendra donc juſqu'à ce que l'*Index CM* ſoit monté vers *D* à une hauteur ſuffiſante, pour que ſon centre de gravité agiſſant par un levier plus long, puiſſe ſervir de contre-poids.

Mais afin qu'une trop lourde maſſe n'expoſe point l'aiguille à monter ſubitement au-delà du point *D*, on ajoute un poids quelconque à ſon extrémité *M*, pour la rendre plus peſante, quand on veut déterminer des poids conſidérables. Il eſt bon auſſi de placer en *D* un obſtacle qui retienne l'aiguille dans le quart de cercle, au cas que ſa peſanteur ne ſuffiſe pas. On ſent bien que le jeu de l'index autour du point *C*, ne peut guere être auſſi libre que celui du fléau dans les balances ordinaires. Le frottement eſt néceſ-

ſairement plus grand; ainſi on ne doit s'en ſervir que pour des poids au moins médiocres. On ne connoît rien de plus ſimple ni de plus propre en même temps à peſer les plus petits poids, que les balances dont ſe ſervent les Jouailliers pour peſer les diamants, & les Eſſayeurs des monnoies pour peſer l'or. Ce ſont des balances ordinaires, mais qui ſont ſi juſtes que la millieme partie d'un grain leur fait quelquefois perdre l'équilibre. On les nomme *Trébuchets*, & on a ſoin de les mettre à l'abri du vent, en les couvrant d'un petit récipient de verre.

206. La facilité de peſer avec aſſez d'exactitude des matieres bien moins précieuſes, fait employer auſſi une machine d'acier dont la forme ſe reconnoît aiſément à la ſeule inſpection de la Figure 92. On ſe ſert encore d'une machine à peu près ſemblable, à laquelle on adapte un cadran, diviſé en plus ou moins de parties, ſelon qu'on veut peſer des poids plus ou moins lourds, *voyez la Fig.* 93. Mais encore une fois, on ne doit pas s'attendre à une grande préciſion dans l'uſage de ces dernieres machines, parce que le frottement, le défaut d'élaſticité, la rouille, & toutes les influences de l'air les rendent néceſſairement imparfaites. FIG. 92 & 93.

A ces premieres applications du levier, il ſeroit facile d'en ajouter une foule d'autres : mais tout le monde ſait à quel point elles ſe multiplient dans les divers uſages de la vie. Les rames des Bateliers, les baſcules, les ponts-levis, toutes les eſpeces de ciſeaux, de tenailles, de pincettes & de manivelles, tout enfin dans la Nature offre des applications

fans nombre de cette machine, qui paffe avec raifon pour la plus fimple & pour la plus utile de toutes.

DE LA POULIE.

Fig. 93. 207. La poulie eft une efpece de roue dont le diametre & l'épaiffeur font arbitraires. Sa circonférence *CFD* eft creufée en forme de *Gorge*, afin d'y fixer la corde *ACB*, dont un bout tient au poids, & l'autre à la puiffance. La roue entiere eft mobile autour de fon axe ou *Effieu E*, dans la *Chape EG*.

Quand la chape eft fufpendue en *G*, la poulie eft *fixe*; & alors il faut pour l'équilibre que la puiffance *B* foit parfaitement égale au poids *A* : elle n'a donc aucun avantage fur le poids, à l'aide de cette machine, fi ce n'eft pourtant qu'elle peut, à fon gré, changer fa direction, ce qui favorife fouvent fes efforts. On en voit affez d'exemples dans les poulies des puits, des greniers, des mâts, &c.

Mais fi la corde qui entoure la poulie, eft attachée à un Fig. 94. point fixe *A* par une de fes extrémités, pendant que la chape porte le poids *M*, la poulie alors eft *mobile*; & il eft clair que dans ce cas la tenfion du cordon *AC*, ou la charge de l'appui *A* doit être égale à la puiffance *B*, fans quoi la poulie glifferoit fur la corde.

Soit donc repréfentée par *IK* la charge de l'appui, & par *KL* la puiffance *B*. On aura la diagonale *HK* pour repréfenter le poids *M*, & puifqu'on a $B : M :: KL : HL$, les triangles femblables *HKL*, *CED*, donneront $B : M :: DE : CD$.

Il faut donc pour établir l'équilibre dans la poulie mobile; que la puiſſance B *ſoit au poids* M, *comme le rayon de la poulie eſt à la ſoutendante de l'arc entouré par la corde.*

Ainſi tant que cet arc aura plus de 60°, la puiſſance aura de l'avantage, & le cas où elle en obtiendra le plus, ſera celui où l'arc enveloppé par la corde ſera de 180°, ce qui arrivera toujours lorſque les deux cordons *A C* & *B D* ſeront paralleles. On ne peut donc rien eſpérer de plus favorable pour la puiſſance, lorſqu'elle exerce ſes forces par l'entremiſe d'une poulie mobile, que de la mettre en équilibre avec un poids double. Si l'arc ſoutendu par *C D* a moins de 60°, on voit bien pourquoi la puiſſance doit avoir du déſavantage. Il ne faut pas oublier, au reſte, de tenir compte du poids de la poulie, quand on veut une grande exactitude dans le réſultat du calcul, & alors il ſuffit de l'ajouter au poids de la maſſe *M*.

La propriété de la poulie mobile a donné lieu à une aſſez belle invention, repréſentée par la Fig. 95. On y voit un poids ou une puiſſance *Q* dont l'action ſe communiquant par le moyen d'une poulie fixe *T* à cinq poulies mobiles, fait équilibre au poids *P* ſuſpendu à la cinquieme. Toutes ces poulies ſont égales entr'elles, & les cordons qui les ſoutiennent ſont paralleles. Chacun de ces cordons eſt attaché en *A* par une de ſes extrémités à une piece de bois ou à un mur quelconque. Fig. 95.

Cela poſé, il eſt évident que la premiere poulie mobile *O* doit être en équilibre avec une puiſſance *Q* deux fois moindre

que la charge de sa chape. Celle de la chape qui suit, doit par la même raison être quatre fois plus grande que cette même puissance, & ainsi des autres, jusqu'à la charge de la poulie O^{IV} qui n'est autre chose que le poids *M*, & qui se trouve par-là en équilibre avec un autre poids *Q* trente-deux fois moins pesant. On peut donc, en multipliant les poulies mobiles, augmenter considérablement les forces d'une puissance qui agit à l'aide d'une pareille machine. L'expression générale de cet accroissement de forces est $P=2^m Q$.

Fig. 96. 208. On appelle *Mouffle* une machine composée de plusieurs poulies *A*, *B*, *C*, *D* disposées d'une maniere quelconque sur une même chape *AD*. Une force médiocre suffit dans une mouffle pour vaincre une grande résistance : mais l'effet de cette machine est bien plus remarquable quand elle réunit une mouffle fixe à une mouffle mobile. Supposons que la mouffle *AD* soit fortement attachée par les *oreilles* *M* & *N*, & qu'une autre mouffle *GE* portant un gros poids *P*, soit suspendue horizontalement à la premiere par une seule corde *H* 7 6 5 4 3 2 1 *Q*, dont l'extrémité *Q* est tirée par la puissance. Cela posé, cherchons la condition de l'équilibre entre le poids *P* & la puissance *Q* : mais auparavant n'oublions pas d'avertir que le poids total de la mouffle mobile & de tout ce qui la concerne, doit être ajouté au poids *P*.

D'abord il est clair, par ce que nous avons dit de la poulie simple, que la tension du cordon 1 est égale à la puissance *Q* ; que celle du cordon 2 est égale à celle du cordon 1, & ainsi de suite. Tous ces cordons doivent par conséquent être tous

également tendus, & la force de leur tenſion ſera toujours meſurée par la puiſſance Q.

Or la tenſion d'une corde en équilibre vient de deux puiſſances égales qui la tirent en ſens contraires; nous pouvons donc regarder chaque cordon, comme étant tiré de bas en haut par la puiſſance Q, & de haut en bas par une autre puiſſance égale à Q. Mais celle-ci ne peut évidemment tendre qu'à charger la mouffle fixe; ſon effet ſera donc anéanti. La premiere au contraire tend à élever la mouffle inférieure; ainſi on doit regarder chaque cordon comme la direction d'une puiſſance Q qui agit pour élever la mouffle EFG. Si on décompoſe donc chacune de ces directions en deux autres, l'une horizontale, dans le ſens de la mouffle, & l'autre verticale, on verra que les premieres doivent ſe détruire mutuellement, afin que la mouffle n'ait aucun mouvement horizontal; & que les autres ſont employées à ſoutenir le poids P. Soit donc A l'angle que fait un cordon quelconque avec l'horizon; il eſt aiſé de voir que $Q\ \mathit{ſin}\ A$ eſt l'effort vertical qui réſulte de la puiſſance Q dirigée ſuivant ce cordon. Ainſi la ſomme de toutes ces puiſſanees, ou $\mathit{ſom}.\ Q\ \mathit{ſin}\ A$, ou $Q\ \mathit{ſom}.\ \mathit{ſin}\, A = P$. Il faut donc, pour établir l'équilibre dans cette machine, que la puiſſance ſoit au poids comme le ſinus total eſt à la ſomme des ſinus des angles que font avec l'horizon les cordons aboutiſſants à la mouffle mobile.

Et par conſéquent, lorſque ces cordons ſont paralleles, la puiſſance doit être au poids, comme l'unité eſt au nombre des cordons qui aboutiſſent à la mouffle mobile. Cette diſpoſition

est donc la plus favorable de toutes aux efforts de la puissance.

Fig. 97. La condition que nous venons d'exposer, n'a pas moins lieu, quand les deux mouffles sont verticales : mais alors il faut que les poulies soient d'inégales grandeurs, & si on veut que les cordons soient paralleles, il faut que les diametres des poulies que la corde embrasse successivement, suivent une progression arithmétique dont la différence soit le diametre de la plus petite poulie.

Supposant donc que les poulies *D*, *E*, *C*, *F*, *B*, *G*, *A* soient respectivement, quant à leurs diametres, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, on aura pour l'équilibre la condition suivante. Le poids doit équivaloir à autant de fois la puissance, qu'il y a de cordons aboutissants à la mouffle mobile. Ensorte que dans le cas présent, une puissance *Q* sept fois moindre que le poids *P*, le soutiendroit en équilibre.

L'usage des poulies mouffiées est fort commun dans les manœuvres des vaisseaux, & généralement par-tout où il s'agit d'élever de gros poids. Elles sont d'autant plus commodes qu'elles n'exigent, pour être mises en jeu, ni beaucoup d'espace, ni de grands efforts. Au reste les avantages qui peuvent en résulter pour la multiplication des forces, ne passent jamais certaines bornes : parce qu'en augmentant trop le nombre des poulies & des cordons, le frottement devient si considérable, qu'il n'y a presque plus rien à gagner pour la puissance.

Il y a plusieurs autres arrangements de poulies, qui tendent

dent plus ou moins à multiplier les forces : mais nous n'entrerons pas dans un plus grand détail ſur cette matiere.

DU TREUIL ET *DES MACHINES* *QUI S'Y RAPPORTENT.*

209. SUR deux appuis *A*, *A* repoſe un cylindre *BB* dont les extrémités ou *Tourillons* peuvent tourner aiſément dans les deux trous ou fentes des appuis. Perpendiculairement à ce cylindre, appellé auſſi *Tambour*, eſt fixée une roue *R*, que la puiſſance s'efforce de faire tourner. Elle entraîne dans ſa révolution le tambour auquel eſt attachée une corde *CC* qui ſoutient le fardeau, & qui l'éleve peu-à-peu, à meſure que le cylindre tourne. Cet enſemble forme le *Treuil*, dont l'uſage eſt ſi commun aux environs de Paris & ailleurs, pour tirer les pierres du fond des carrieres. FIG. 98.

Souvent au lieu de la roue, on ſe ſert d'une ſimple manivelle ou de deux leviers qui traverſent le cylindre : mais en regardant ces leviers comme autant de rayons d'une même roue, on voit bien que c'eſt la même machine. Il paroît ſeulement que la révolution du tambour produite par la force des leviers eſt moins uniforme que celle qui s'opere par la roue : mais auſſi le volume des leviers eſt moins embarraſſant. On voit de ces ſortes de machines ſur tous les *Haquets*, ou voitures deſtinées à tranſporter les pieces de vin.

210. Dépouillons maintenant la Fig. 98 de tout ſon appareil extérieur, pour ne conſidérer que les parties eſſen-

Fig. 99. tiellement relatives à l'équilibre. Soit donc AB l'axe du cylindre appuyé sur les deux extrémités A & B : soit DFE la demi-circonference de la roue, à laquelle est appliquée la puissance P, suivant la tangente FMP : soit H le point où la corde HQ touche la surface du cylindre, dont GH représente le rayon ou la perpendiculaire menée du point H sur l'axe AB. Imaginons enfin que l'intersection du plan vertical DFE de la roue avec le plan horizontal ABH, soit la droite CMO.

Cela posé, si on conçoit la puissance P appliquée en M & représentée par MN, on pourra la décomposer en deux forces, l'une horizontale exprimée par MO, l'autre verticale exprimée par MR. Or la premiere est dans la direction du point C; elle est donc détruite par la résistance de l'axe, & tout son effort se réduit à charger horizontalement les appuis A & B. C'est donc la seconde de ces forces qui doit seule faire équilibre au poids Q dirigé suivant HQ.

Imaginant donc le levier MKH dont l'appui est en K, on aura pour l'équilibre, $MR : Q :: HK : MK$; d'ailleurs les triangles KMC, KGH sont semblables, ainsi que les triangles MNR, MFC; on aura donc 1°, $HK : MK$, ou bien $MR : Q :: GH : CM$; 2°, $MR : MN :: CF : CM$; d'où on tirera

$$Q . GH = CF . MN = CF . P$$

c'est-à-dire, que *l'équilibre dans le treuil exige que la puissance appliquée à la roue, soit au poids comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue ;* ou ce qui revient au même, l'équilibre a

lieu dans le treuil, lorſque les moments de la puiſſance & du poids, pris par rapport à l'axe, ſont égaux.

211. Pour déterminer la charge des deux appuis A & B, il faut décompoſer la force horizontale MO, ou $\frac{MF}{CM}P$ en deux autres dont l'une ſoit dirigée vers A, l'autre vers B. Celle qui paſſera par A, ſera $Aa' = \frac{MF}{CM} \cdot \frac{CB}{AB}P$; celle qui paſſera par B, ſera $Bb' = \frac{MF}{CM} \cdot \frac{AC}{AB}P$.

Pareillement les deux forces verticales MR & Q ſe réduiſant à une ſeule, $Q + MR$ ou $Q + \frac{CF}{CM}P$, qui paſſe par K, on la décompoſera en deux autres forces verticales dirigées ſur A & ſur B, dont la premiere Aa aura pour expreſſion $\frac{KB}{AB}\left(Q + \frac{CF}{CM}P\right)$, pendant que la ſeconde ſera repréſentée par $Bb = \frac{AK}{AB}\left(Q + \frac{CF}{CM}P\right)$. Achevant donc les rectangles $Aa'a''a$, $Bb'b''b$, les diagonales Aa'', Bb'' exprimeront les charges des appuis A & B.

212. La condition de l'équilibre dans le treuil nous fait voir que la puiſſance a d'autant plus d'avantage, qu'elle eſt appliquée à une plus grande roue. Cette roue, au reſte, peut être placée par-tout où l'on veut, dans la longueur du cylindre, ſans que l'équilibre en ſoit troublé. On pourroit ſuppoſer, par exemple, la ſection GH dans le même plan que la roue, & l'équilibre n'en feroit pas moins exprimé par l'équation $P \cdot GF = Q \cdot GH$; car alors les deux forces P & Q luttant l'une contre l'autre ſur le levier angulaire FCH, leurs efforts ſeroient égaux, auſſi-tôt que l'on auroit $P \cdot GF = Q \cdot GH$. Fig. 100.

REMARQUE I.

213. La corde dont on se sert dans le treuil étant presque toujours d'un diametre notable, & l'action de la puissance se transmettant au poids par l'axe même de la corde, il faut ajouter le demi-diametre de la corde, soit au rayon du cylindre, soit au rayon de la roue.

Et delà vient qu'il faut augmenter la puissance, lorsqu'après avoir couvert toute la longueur du cylindre d'un premier rang de corde, on vient à en mettre un second, ou un troisieme, &c.

FIG. 101. 214. Si au lieu d'être horizontal, l'axe du treuil est perpendiculaire, la machine porte alors le nom de *Cabestan*. On s'en sert fréquemment pour amener peu-à-peu des masses considérables, comme des pierres énormes, des blocs de marbre, des statues équestres de bronze, &c. On commence par les soulever avec des leviers, de maniere à pouvoir introduire des rouleaux dessous. Quelquefois aussi on les établit sur une forte charpente soutenue par des roues très-épaisses & massives, puis on enfonce bien avant dans la terre un pieu *K* auquel on attache le cabestan. Quatre hommes, ou plus s'il le faut, appliqués chacun à un levier font tourner le cylindre, la corde s'enveloppe à mesure sur sa circonférence, & le poids avance d'autant. Quand il est près du pieu, on attache le cabestan plus loin, on recommence la même manœuvre, & à force de la continuer, une simple poignée d'Ouvriers peut enfin venir à bout de traîner jusqu'au lieu de leur destination ces poids immenses.

C'eſt ainſi que malgré tout le frottement qu'il faut vaincre, nous voyons ſi ſouvent remuer ſans de grands efforts les plus lourdes maſſes. Quand il s'agit de les amener à de petites diſtances, on fixe à demeure le cabeſtan, & on met en jeu ſes leviers, pendant qu'un homme aſſis près du cylindre développe les premiers tours de corde à meſure qu'il s'en forme de nouveaux. A Paris, tout le monde connoît cette manœuvre; elle ſert continuellement à décharger les bateaux de pierre, &c.

REMARQUE II.

215. Les treuils dont on fait uſage pour la conſtruction des bâtiments médiocres, ſont ordinairement portés ſur deux pieces de bois qui font un angle, au ſommet duquel ſe trouve une poulie entourée par la corde. On appelle *Grue* ceux qu'on emploie dans les grands édifices.

Or dans une grue, l'aſſemblage de toutes les parties du cylindre & des roues fait équilibre à une grande piece de bois dont la direction eſt oblique à l'horizon, & qui porte des poulies fixes ſur leſquelles paſſe la corde. Le tout eſt très-mobile ſur un pivot, de façon qu'ayant élevé le fardeau à une certaine hauteur, on peut le faire tourner aiſément tout autour de la grue.

Et pour donner plus de force à cette machine, on diſpoſe ordinairement à chaque extrémité du cylindre, une roue de ſix pieds de rayon, ſur laquelle on monte par de petits échellons, afin de s'aider de ſon propre poids; ou ſi elles ont un tambour chacune, les ouvriers les font tourner, en

marchant plusieurs ensemble dans l'intérieur du tambour.

FIG. 102. 216. Représentons par CAB le quart de la roue dans lequel ces hommes marchent, & par M, M', M'', M''', B, les points où leur pesanteur agit suivant les perpendiculaires PM, $P'M'$, $P''M''$, &c. Appellant donc M, M', &c, leurs poids respectifs, nous aurons pour l'expression de leurs moments rapportés au centre C, les produits $M.CP$, $M'.CP'$, &c, dont la somme doit être égale au moment de la masse qu'ils élèvent.

Soit donc CE le rayon du cylindre, P le poids à soutenir; on aura $P.CE = M.CP + M'.CP' + M''.CP'' + M'''.CP''' + B.CB$ (en supposant qu'il n'y ait qu'une seule roue; car s'il y en avoit deux égales en dimensions & en puissances, la somme de leurs moments seroit évidemment double).

217. Prenons pour exemple une grue qui ait deux roues, sur chacune desquelles agissent n hommes tous d'un poids égal, & tous appliqués à des distances égales AM, MM', &c. Soit M le poids d'un de ces hommes, r le rayon CE du cylindre, augmenté du demi-diametre de la corde, R le rayon CA de la roue, & l'arc $AM = \frac{90°}{n} x$. On aura

$$P.r = 2M.R\,(\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx, \text{ ou } 1)$$

Or la somme de cette série est $\frac{1 + \cot\frac{1}{2}x}{2}$, (*Voyez* le premier volume de l'Introduction à l'analyse des infinis, par M. Euler). On réduira donc l'équation précédente à celle-ci,

$$P.r = M.R\,(1 + \cot\tfrac{1}{2}x).$$

Exemple.

Le rayon de chaque grande roue ayant 8 pieds de longueur, & celui du cylindre joint au demi-diametre de la corde, n'ayant que 6 pouces, on demande le poids *P* que 6 hommes appliqués à chaque roue pourront tenir en équilibre ?

On eſtime à 150℔ le poids moyen d'un homme. Ainſi en ſubſtituant dans la formule précédente toutes les valeurs des quantités qui la compoſent, on trouvera que $P = 16 \cdot 150 (1 + \cot 7^\circ 30') = 16 \cdot 150 \cdot 8{,}5957541 = 20629{,}80984$. Ce poids ſera donc de 20630℔; & pour peu que l'on augmente les forces motrices, juſqu'à leur faire vaincre la réſiſtance des frottements, on élevera à volonté cette lourde maſſe.

La même formule feroit également connoître le nombre d'hommes qu'il faudroit appliquer à chaque roue, afin de mettre leurs efforts en équilibre avec un poids quelconque donné.

218. Il ne faut pas oublier dans les calculs relatifs aux uſages des grues, d'avoir égard aux poids & à la roideur des cordes qu'on emploie. Plus elles ſont groſſes, plus on a de la peine à leur faire prendre la forme du cylindre ; & quand elles ſont neuves, leur roideur eſt encore plus difficile à vaincre. On éprouve auſſi plus de difficulté à cet égard, ſoit lorſqu'elles ſoutiennent de plus grands poids, ſoit lorſque le mouvement des roues eſt plus rapide, ſoit enfin lorſque

les poulies qu'elles enveloppent, ſont plus petites. Quant à leur propre poids, on doit auſſi en tenir compte, mais ſur-tout quand les fardeaux à élever exigent de gros *Cables*, pour la ſûreté des manœuvres.

REMARQUE III.

219. Les différents *Rouages* ne ſont autre choſe que des treuils, dans leſquels la puiſſance agit ſur la grande roue à l'aide de ſes propres *dents*. Ce qui tient alors lieu du cylindre eſt une roue dentée beaucoup plus petite, adaptée ſur l'axe ou *Tige* de la grande roue, de maniere qu'elle ne peut tourner ſans que la grande ne tourne auſſi. Pour diſtinguer l'une de l'autre, on appelle la petite un *Pignon ;* ſes dents s'appellent des *ailes*.

FIG. 103.

Les dents des roues ſont ordinairement taillées dans leur plan, c'eſt-à-dire, en allant de la circonférence vers le centre : mais il n'eſt pas rare d'en voir qui ſont taillées perpendiculairement au plan des roues. Alors la roue s'appelle roue en *couronne* ou roue de *champ*.

FIG. 104.

Quelquefois auſſi au lieu d'un pignon on emploie une eſpece de cylindre creux, appellé *Lanterne*, dont la ſurface convexe eſt remplacée par des *fuſeaux* paralleles entr'eux & diſpoſés à des diſtances égales. Ces fuſeaux produiſent le même effet que les dents ordinaires. On en voit dans tous les moulins.

FIG. 105.

FIG. 106.

220. Suppoſons maintenant une roue A dentée ou non dentée, ſur laquelle agiſſe une puiſſance Q, ſuivant la tangente MQ : elle porte ſur ſa tige un pignon a qui engrene une

une roue dentée B : la tige de celle-ci porte un pignon b qui mene une troisieme roue C; & pour ne pas multiplier davantage les pignons & les roues, nous supposerons que la roue C porte sur son axe un pignon, ou un cylindre c autour duquel la corde NP qui suspend le poids P, s'enveloppe à mesure que tout le rouage tourne. Cherchons, cela posé, le rapport qu'il doit y avoir entre la puissance Q & le poids P, pour que l'équilibre ait lieu.

Soient R, R', R'' les rayons des roues A, B, C; soient r, r', r'' les rayons de leurs pignons respectifs a, b, c; & soient enfin désignées par a, b, P les forces avec lesquelles tendent à tourner les points tangents de ces pignons. Nous aurons par la propriété du treuil,

$$Q : a :: r : R \ldots\ldots a : b :: r' : R' \ldots\ldots b : P :: r'' : R'';$$

& multipliant ces trois proportions, il en résultera

$$Q : P :: rr'r'' : RR'R''.$$

Donc *pour établir l'équilibre à l'aide des roues dentées, il faut que la puissance soit au poids, comme le produit des rayons de tous les pignons est au produit des rayons de toutes les roues.*

Ainsi lorsque le rayon de chaque pignon est la dixieme partie du rayon de la roue, & qu'il y a 3 pignons & 3 roues, une puissance mille fois moindre qu'une autre, une seule livre, par exemple, en soutiendroit mille, & si on ajoutoit seulement deux roues & deux pignons de plus, cette même livre en contre-balanceroit cent mille. Peu de machines sont donc aussi propres que les roues dentées, à multiplier les forces.

221. Mais considérons le rouage en mouvement, &

Fig. 107. suppofons que le pignon *a* mene tout cet enfemble de roues & de pignons. Soient repréfentés par n, n' les nombres des ailes des pignons *a* & *b*, & par N, N' les nombres des dents des roues *B* & *C*. Il eft évident que le premier pignon *a* ne peut faire un tour entier, fans que la roue *B* ne faffe une partie de fa révolution. Cette partie doit répondre à n de fes dents, & fon expreffion générale eft la partie $\frac{n}{N}$ d'une de fes révolutions totales.

La roue *C* doit pour les mêmes raifons faire une partie de fon tour, laquelle eft vifiblement une fraction $\frac{n'}{N'}$ de la quantité $\frac{n}{N}$ dont la roue *B* a tourné. Ainfi pendant que le pignon fait un tour entier, la roue *C* n'en fait que la $\frac{n\,n'}{N\,N'}$ ieme partie.

222. Il fuit delà que quelque foit le nombre des roues, on a toujours cette proportion. *Le nombre de tours faits par le pignon qui mene le rouage eft au nombre de tours faits par la derniere roue, comme le produit des nombres de dents de toutes les roues eft au produit des nombres d'ailes de tous les pignons.*.

223. Donc fi le rouage étoit mené par la roue *C*, la vîteffe de cette roue feroit à celle du dernier pignon *a*, comme le produit des nombres d'ailes de tous les pignons eft au produit des nombres de dents de toutes les roues. Et par-là on peut déterminer dans tous les cas les nombres de dents ou d'ailes qu'il convient de donner aux différentes pieces d'un rouage, pour que la premiere roue faifant un tour en un certain temps, la derniere faffe un tour auffi en un autre temps donné. Rien de plus ingénieux dans l'Horlogerie que les applications que l'on a faites de ce principe aux

divers mouvements qui marquent les ſecondes, les minutes, les heures, les jours, les mois, & le cours des Aſtres. Eſſayons de développer un peu ce méchaniſme, en le conſidérant dans les *Montres* ordinaires.

224. Ce qui donne le mouvement à toute la machine, eſt un reſſort ſpiral caché dans le tambour ou *Barillet A*, lequel eſt mobile autour de ſon axe. On bande ce reſſort avec la clef de la montre, (c'eſt ce qu'on appelle aſſez improprement *monter* une montre); & comme il eſt attaché par une de ſes extrémités à l'axe du barillet, & par l'autre à la ſurface concave de ce petit tambour, il faut qu'en ſe débandant, il le faſſe tourner. Or le tambour porte ſur ſa ſurface convexe une petite chaîne d'acier qui lui eſt attachée par un bout, & qui l'eſt par l'autre à la *Fuſée B*, eſpece de conoïde, dont elle peut ordinairement faire ſept fois & demi le tour. Cela poſé, quand on tourne la fuſée, au moyen de la clef appliquée ſur ſon axe *P*, on fait tourner en même temps le barillet. Ainſi le reſſort intérieur ſe bande, à meſure que la chaîne paſſe du tambour ſur la fuſée. FIG. 108.

Mais au moment où vous ceſſez de tourner la clef, le reſſort commence à ſe débander, le barillet tourne en ſens contraire, la chaîne revient ſur ſa ſurface, & la fuſée ſe devide peu-à-peu. Il eſt vrai que les forces du reſſort diminuent à meſure qu'il ſe débande : elles ne pourroient donc faire mouvoir uniformément la fuſée, ce qui eſt abſolument eſſentiel, ſi on n'eût pas trouvé des moyens de compenſer leur diminution. Voici d'abord le plus efficace. Au lieu

de donner à la fusée une forme cylindrique, on a imaginé de lui donner celle d'un conoïde tronqué, afin que les moments des forces du ressort fussent constamment égaux entr'eux. Cette précaution suffiroit seule pour maintenir une parfaite uniformité dans le mouvement du rouage, si on pouvoit s'assurer dans la pratique, que le ressort se débande toujours suivant une même loi, & que la fusée a bien exactement la forme qu'elle doit avoir. Mais comme il n'est pas possible d'avoir sur ces deux points une entiere certitude, on a remédié à ce double inconvénient par d'autres moyens.

225. Avant de les faire connoître, suivons pas-à-pas les effets du ressort. On tâche de le disposer de maniere qu'il ne puisse être entiérement débandé, qu'au bout de 30 heures ; ainsi la fusée qui a sept tours & demi à faire, fait réguliérement un tour toutes les quatre heures. Sa base est garnie d'une roue de 48 dents bien égales, qui engrenent un pignon de 12 aîles bien égalisées aussi entr'elles. Ce pignon doit donc achever sa révolution dans une heure ; & par conséquent si on fixe une aiguille à l'extrémité de sa tige prolongée jusqu'au cadran, cette aiguille marquera les minutes.

226. Reste à faire mouvoir l'aiguille des heures ; & pour cela on a imaginé un rouage placé entre le cadran & la *Platine* du mouvement. Le pignon *M* est placé sur la tige de la roue des minutes ; il fait donc un tour par heure. D'ailleurs il engrene la roue *N* dont le pignon *P* élevé au-dessus de son plan fait mouvoir la roue *Q*. Cette roue est d'une même piece que le *Canon* ou petit cylindre creux auquel est atta-

FIG. 109.

chée l'aiguille des heures, & au milieu duquel doit tourner librement la tige de l'aiguille des minutes. On la voit décrite séparément dans la Fig. 110 : il n'y a plus qu'à la concevoir suspendue au cadran par le moyen du canon, ensorte qu'elle puisse tourner aisément, comme elle le feroit autour de la tige des minutes. Fig. 110.

Mais on peut se former une idée encore plus claire de tout ce rouage, en jettant les yeux sur la Fig. 111 qui en représente une coupe perpendiculaire suivant la tige de la roue des minutes. Cette tige *KO* porte le pignon *MM* qui engrene la roue *NN*. La roue *NN* porte sur sa tige le pignon *PP* qui engrene la roue *QQ*, dont le canon creux *CCEE* porte enfin à son extrémité supérieure *CC* l'aiguille des heures *CD*. Fig. 111.

227. Or pour déterminer maintenant les nombres convenables de dents des roues *N* & *Q*, & ceux des ailes des pignons *P* & *M*, désignons ces quatre nombres par les lettres mêmes *N*, *Q*, *P*, *M* de ces roues & de ces pignons. Puisque la roue *Q* ne fait qu'un tour, pendant que le pignon en fait 12, on aura (222) $12P . M = N . Q$; d'où il suit que ce problême & tous ceux de même nature sont, en général, fort illimités. Cependant si on fait attention 1°, que les indéterminées *P*, *M*, *N*, *Q* doivent être des nombres entiers ; 2°, que le nombre des ailes d'un pignon ne doit pas passer 12, autant qu'il est possible ; 3°, que le nombre des dents d'une roue ne doit jamais excéder 100, quand on ne veut pas faire la montre trop grosse, on comprendra facile-

ment que le nombre des solutions possibles est souvent fort limité. Dans le cas présent, entr'autres, il n'y a pas beaucoup de manieres de remplir les conditions énoncées dans le problême ; une des plus simples est de donner indifféremment 10 & 12 ailes aux pignons P, M, auquel cas la roue N & la roue Q auroient 40 & 36 dents. On pourroit aussi prendre les moitiés de ces quatre nombres.

228. Nous remarquerons, en passant, que les nombres des dents d'un rouage étant déterminés, la grandeur des roues & des pignons n'est plus arbitraire. En effet, pour qu'une roue puisse engrener exactement un pignon, il faut que l'intervalle entre les points touchants de deux dents consécutives soit égal à l'intervalle entre les points touchants de deux ailes consécutives. Donc si N est le nombre des dents de la roue, & n le nombre des ailes du pignon, le rayon de la roue doit être à celui du pignon, comme le sinus de $\frac{180^\circ}{n}$ est au sinus de $\frac{180^\circ}{N}$. (Par rayon, nous entendons ici, comme à l'ordinaire, la distance du centre au point de contact).

Fig. 111. Dans le rouage précédent, nous aurons donc $MN = \frac{MM \sin 15^\circ}{\sin 5^\circ}$, & $QQ = \frac{PP \sin 18^\circ}{\sin 4^\circ 30'}$: mais il y a une condition de plus ; il faut que $NN + MM = PP + QQ$, ou que $MM \cdot \frac{\sin 15^\circ + \sin 5^\circ}{\sin 5^\circ} = PP \cdot \frac{\sin 18^\circ + \sin 4^\circ \cdot 40'}{\sin 4^\circ 30'}$; ce qui nous donnera

$$NN = \frac{MM \sin 15^\circ}{\sin 5^\circ}$$

$$PP = MM \cdot \frac{\sin 10^\circ \cdot \cos 5^\circ \cdot \sin 4^\circ 30'}{\sin 5^\circ \cdot \sin 11^\circ 15' \cdot \cos 6^\circ 45'}$$

$$QQ = MM \cdot \frac{\sin 10^\circ \cdot \cos 5^\circ \cdot \sin 18^\circ}{\sin 5^\circ \cdot \sin 11^\circ 15' \cdot \cos 6^\circ 45'}.$$

Calculant ces valeurs par logarithmes, on aura $NN = 2{,}9696\, MM = 2\frac{11}{13} MM \ldots PP = 0{,}8038\, MM = \frac{41}{51} MM \ldots QQ = 3{,}1658\, MM = 3\frac{1}{6} MM$. Ainfi le rapport que doivent garder entr'elles toutes ces différentes pieces du rouage eft déterminé.

229. C'eft donc avec un tel rouage caché entre le cadran & la platine adhérente, qu'on peut faire marcher l'aiguille des heures avec celle des minutes; & il ne faudroit rien de plus pour la conftruction des montres, fi le reffort pouvoit feul faire tourner la fufée avec une parfaite uniformité. Mais le froid & le chaud, l'humidité & la fécherefſe, les diverfes pofitions de la montre, tout confpire à faire débander inégalement le reffort. D'ailleurs fi on ne lui oppofoit pas une réfiftance qui pût ménager fa force, la fufée, au lieu de fe devider en 30 heures, fe devideroit dans un inftant. Le *Balancier* produit cette réfiftance; & voici comment.

Un rouage mené par une roue placée fur la tige des minutes fait mouvoir une derniere roue nommée *Roue de rencontre*, qui engrene les *palettes* du balancier. On donne à cette roue un nombre de dents impair, afin que chaque dent foit diamétralement oppofée à un efpace vuide, & que par-là deux dents ne puiffent jamais rencontrer à la fois le balancier. Cette conftruction fait que les palettes font alternativement pouffées par les dents fupérieures & inférieures de la roue de rencontre, & à mefure que cette roue avance d'une dent, le balancier fait deux vibrations. Or il en fait 17280 par heure, dans les montres ordinaires.

La roue du balancier fait ses vibrations dans le *Coq*, où elle est assujettie à un petit ressort spiral qui résiste à son mouvement ou l'accélere, suivant le besoin. Cette résistance ou cette accélération se transmet à toute la machine, & rend le mouvement beaucoup moins irrégulier. On sait d'ailleurs qu'en tournant l'aiguille de *Rosette* placée près du coq ; on retarde ou on avance la montre, parce qu'on alonge ou on diminue par-là cette partie du ressort qui modere les vibrations, & qui résiste plus ou moins au mouvement du balancier, selon qu'elle est plus ou moins courte.

230. Déterminons maintenant le rouage qui étant mené par une roue placée sur la tige des minutes, doit produire 17280 vibrations du balancier par heure.

La premiere roue est celle qui fait un tour par heure; elle est représentée ici par R. Le pignon r que vous lui voyez engrener, porte à sa tige la roue R', qui engrene le pignon r'. Celui-ci porte sur sa tige la roue de champ R''; cette roue engrene le pignon r'', & ce dernier pignon porte enfin la roue de rencontre R'''. Telle est ordinairement la disposition de ces sortes de rouages : & quoique toutes les montres ne soient pas faites de la même maniere, les principes du calcul suivant n'en sont pas moins généraux.

Fig. 108. & 112.

Soient R, R', R'', R''' les nombres respectifs des dents qu'il faut donner aux roues désignées par ces mêmes lettres ; soient r, r', r'' les nombres d'ailes de leurs pignons. Pendant que la premiere roue R fera un tour, le pignon r'' ou la roue R''' fera un nombre de tours généralement exprimé

par

par $\frac{R \,.\, R' \,.\, R''}{r \,.\, r' \,.\, r''}$. Cette roue fera donc passer d'heure en heure un nombre de dents exprimé par $\frac{R \,.\, R' \,.\, R'' \,.\, R'''}{r \,.\, r' \,.\, r''}$. Or chaque dent produit deux vibrations du balancier ; donc $\frac{2R \,.\, R' \,.\, R'' \,.\, R'''}{r \,.\, r' \,.\, r''}$ doit donner 17280 vibrations : on aura donc $R \,.\, R' \,.\, R'' \,.\, R''' = 8640 \,.\, r \,.\, r' \,.\, r''$, & supposant tous les pignons de six ailes chacun, on trouvera $R \,.\, R' \,.\, R'' \,.\, R''' = 1728 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 6 \,.\, 6$.

Mais comme la roue de rencontre doit avoir un nombre impair de dents, & qu'elle ne peut guere en avoir moins de 13, ni plus de 17, il n'y a qu'à lui en supposer 15. Alors $R \,.\, R' \,.\, R'' = 1728 \,.\, 2 \,.\, 6 \,.\, 6 = 54 \,.\, 48 \,.\, 48$. On pourra donc donner 54 dents à la roue R, 48 à R', & 48 aussi à R'' ; la roue de rencontre en aura 15, & chaque pignon aura 6 ailes. Les deux problêmes suivants se résolvent de la même maniere.

PROBLÊME I.

[230. Trouver les nombres de dents & d'ailes de toutes les pieces d'un rouage, qui étant mené par un pignon placé sur la tige de la roue des heures, ne feroit faire qu'un seul tour à la derniere roue, pendant le cours d'une année commune, c'est-à-dire, en $365^j\, 5^h\, 49'$. *

Le pignon placé sur la tige de la roue des heures fait un tour en 12 heures, & la derniere roue doit en faire un en $365^j\, 5^h\, 49'$, ou en $8765^h \frac{49}{60}$, qui en divisant par 12 donne $730 \frac{349}{720}$. Soient donc r, r', r'' les nombres des ailes des trois pignons ; soient R, R', R'' les nombres des dents des trois roues, on aura $R \,.\, R' \,.\, R'' = 730 \frac{349}{720}\, r \,.\, r' \,.\, r''$.

Cela posé, pour que $R \,.\, R' \,.\, R''$ soit un nombre entier, il

faudra prendre $r \,.\, r' \,.\, r'' = 720$, dont les facteurs 8, 9, 10 font des nombres propres à donner les ailes des trois pignons. Il eft vrai que cette fuppofition entraîne un inconvénient, favoir que $R \,.\, R' \,.\, R''$ devient alors égal à 525949, qui ne peut pas fe décompofer en trois facteurs propres à donner les nombres de dents des trois roues R, R', R'' : mais on y remédie, en cherchant par voie d'approximation, ce que le calcul ne peut donner d'une maniere exacte. Voici comment.

Puifque la queftion fe réduit à faire enforte que $\frac{349}{720} r \,.\, r' \,.\, r''$ foit un entier, voyons fi en le diminuant de la plus petite quantité poffible $\frac{\delta}{720}$, nous ne pourrions pas en faire un entier. Pofons donc $\frac{349 \,.\, r \,.\, r' \,.\, r'' - \delta}{720} = E$, ou $r \,.\, r' \,.\, r'' = \frac{720 E + \delta}{349}$. Le refte de cette divifion eft $\frac{\delta + 22 E}{349}$, & fi on le multiplie par 16, le refte fera $\frac{16 \delta + 3 E}{349}$. Multipliant par 116, & prenant le refte de la réduction, nous aurons $\frac{111 \delta - E}{349}$ qui doit être un entier E'; donc $E = 349 E' + 111 \delta$. Subftituant cette valeur, on aura $r \,.\, r' \,.\, r'' = 720 E' + 229 \delta$, & $R \,.\, R' \,.\, R'' = 525949 E' + 167281 \delta$, en rejettant dans cette derniere équation, la quantité $\frac{\delta}{720}$, qui n'eft d'aucune conféquence, comme nous le verrons bientôt.

On peut maintenant donner à E' & à δ telles valeurs que l'on voudra, jufqu'à ce que les produits $r \,.\, r' \,.\, r''$, & $R \,.\, R' \,.\, R''$ puiffent fe décompofer en facteurs convenables. Si on fait l'effai de plufieurs, on trouvera que celles qui réuffiffent font $E' = -1$, & $\delta = 4$; d'où on déduit $r \,.\, r' \,.\, r'' = 196$, & $R \,.\, R' \,.\, R'' = 143175$. Les facteurs de 196 font 4, 7, 7;

ceux de 143175 ſont 25, 69, 83 : on peut d'ailleurs doubler l'un des trois premiers, pourvû qu'en même temps on double l'un des trois derniers. Ainſi le problême ſera réſolu, en prenant trois pignons de 7, 7, 8 ailes, & trois roues de 50, 69, 83 dents, diſpoſant le tout d'une maniere quelconque : car il eſt indifférent de donner à telle ou telle roue un des trois derniers nombres de dents.

Or quoique nous ayons négligé une petite fraction dans le calcul précédent, il n'y a pas à craindre qu'il en réſulte d'erreur ſenſible. A peine la correction deviendroit-elle néceſſaire après avoir laiſſé accumuler pendant un grand nombre de périodes, toutes ces petites erreurs. Pour s'en convaincre, il ſuffit de voir ce qui ſe paſſe dans un tel rouage. En effet les nombres des dents & des ailes étant ſuppoſés tels que ceux qui viennent d'être déterminés, il eſt clair que la premiere roue faiſant un tour, le premier pignon en fera $\frac{143175}{196}$; & puiſque ce pignon fait un tour en 12 heures, la premiere roue en fera un en $\frac{143175 \cdot 12}{196}$ heures $= \frac{143175 \cdot 3.^h}{49} = 365^j\, 5^h\, 48'\, \frac{48}{49}$. Ainſi le problême eſt réſolu à $\frac{1}{49}$ de minute près, ce qui donne une approximation plus que ſuffiſante.

PROBLÊME II.

231. On demande quels doivent être les nombres de dents & d'ailes d'un rouage, pour qu'un pignon qui le mene, étant porté ſur la tige des minutes, faſſe tourner la derniere roue en $29^j\, 12^h\, 44'\, 3''$, durée de chaque révolution ſynodique de la Lune ?

Réduiſant en heures cet intervalle de temps, on trouvera

$708^h \frac{881}{1200}$; & appellant x le produit des nombres d'ailes de tous les pignons, y le produit des nombres de dents de toutes les roues, on aura $y = 708 \frac{881}{1200} x$, équation qui ne peut être résolue que par approximation, en supposant que $\frac{881x - \delta}{1200}$ est un entier. Et si on acheve le calcul, comme dans le problême précédent, on trouvera $x = 1200 E - 79\delta$. . . . $y = 850481 E - 55990\delta$. Faisant donc $E = 1$, $\delta = 4$, on aura $x = 884$ & $y = 626521$.

On peut décomposer le premier de ces nombres en trois facteurs 4, 13, 17 ; le second peut se décomposer en quatre, 7, 37, 41, 59. Mais si on vouloit réduire ceux-ci à trois, on multiplieroit les deux plus petits, 7 & 37, l'un par l'autre, ce qui donneroit 259, nombre beaucoup trop grand pour exprimer le nombre des dents d'une roue. Reste donc, en pareil cas, à supposer quatre roues & quatre pignons. Or pour introduire un nouveau pignon de 6 ailes, il faut donner à une des roues six fois plus de dents ; & le choix est bien aisé, puisqu'il y en a une de 7 dents. Le problême sera donc résolu, si on emploie quatre pignons dont les nombres d'ailes soient respectivement 4, 6, 13, 17, pendant que les nombre de dents de quatre roues seront indifférement 37, 41, 42, 59.

Ces principes suffisent pour expliquer tout le méchanisme de ces sortes de rouages. On pourra toujours se servir de la solution du premier problême, pour marquer sur les cadrans les mois, les quantiemes des mois, les équinoxes, les solstices, & généralement tout ce qui a rapport à l'année solaire.

En imitant le procédé qui nous a conduits à la résolution du second problême, on pourra indiquer, d'une maniere fort exacte, l'âge de la lune & toutes ses phases.] *

REMARQUE IV.

232. PARMI toutes les autres machines qui se rapportent immédiatement au treuil, le *Cric* tient à juste titre un des premiers rangs. C'est en effet un des plus simples instruments de la Méchanique, & on n'en connoît gueres de plus efficace. FIG. 113.

La puissance agit par le moyen d'une manivelle $AMNP$ dont l'axe NP porte un pignon P, qui engrene la barre dentée CD, & l'oblige de monter. Or il est clair que, pour établir l'équilibre dans cette machine, la puissance appliquée à la manivelle doit être à la force qui tend à élever la barre CD, comme le rayon du pignon est au rayon MN de la manivelle.

Et comme le premier rayon est beaucoup plus petit que le second, on peut soulever facilement avec le cric des poids considérables. Mais sa force deviendra bien plus grande, si on ajoute une roue & un pignon de plus : car alors la puissance appliquée à la manivelle est à la force qui tend à élever la barre CD, comme le produit des rayons des pignons P, R est au produit du rayon de la roue N, par le rayon MN de la manivelle. FIG. 114.

DU PLAN INCLINÉ.

233. NOUS avons déja vu (149 *& suiv.*) quelles

étoient les conditions néceſſaires, pour qu'un corps poſé ſur un plan horizontal y reſtât en équilibre. Il faut en général que la verticale menée par ſon centre de gravité ne laiſſe pas tous ſes appuis d'un ſeul côté. Cherchons maintenant ce qu'il faut obſerver pour l'équilibre d'un corps poſé ſur un plan incliné à l'horizon.

On voit d'abord que les forces qui ſollicitent ce corps; doivent toutes ſe réduire à une ſeule force perpendiculaire au plan incliné, ſans quoi il ne peut y avoir d'équilibre. Cette réduction une fois faite, il eſt évident que la réſultante ſera détruite par le plan, & que par conſéquent le corps reſtera immobile. Jamais il ne pourra ſe mouvoir, tant que ſes appuis ne ſeront pas tous du même côté de la réſultante.

Fig. 115. 234. Soit *P* la puiſſance qui retient le corps en équilibre; ſoit *G* le centre de gravité de ce corps, & *GQ* la verticale menée par ce centre, laquelle rencontre en *M* la direction de la puiſſance. Suppoſons maintenant que l'on repréſente par *MR* la force *P*, & que la ligne *MQ* déſigne le poids *G*; en achevant le parallélogramme *MQNR*, on aura la diagonale *MN* pour repréſenter la réſultante que nous avons dit devoir être perpendiculaire au plan, pour qu'elle fût détruite. La premiere condition néceſſaire pour l'équilibre ſur le plan incliné, exige donc que le centre de gravité & la direction de la puiſſance ſe trouvent dans un même plan qui ſoit perpendiculaire au plan incliné.

Soit *AB* la ſection du plan *QMP* avec le plan ſur lequel

il s'agit d'établir l'équilibre ; soit *B C* la ligne horizontale menée par *B*, on l'appelle la *Base* du plan incliné, & *A C* la verticale menée par *A*, on l'appelle la *Hauteur* de ce plan; *BC* en est la *Longueur*; & l'angle *A B C* en mesure l'inclinaison.

La seconde condition nécessaire pour l'équilibre, est que la résultante *M N* soit perpendiculaire à *A B* : d'ailleurs la puissance *P* est au poids *G*, comme *M R* : *M Q* : : *sin Q M N* : *sin N M R*; & cette même puissance est à la pression sur le plan, comme *M R* : *M N* : : *sin Q M N* : *sin Q M R*.

Or on peut conclure de la proportion qui précede celle-ci, que la puissance *P* sera la plus petite qu'il est possible, lorsque l'angle *N M P* sera droit, ou ce qui est la même chose, lorsque la direction *M P* sera parallele au plan : car alors la puissance est au poids, comme *sin Q M N* est à l'unité. Et puisque dans ce cas les triangles *Q M N*, *A B C* sont semblables, on a cette proportion : la puissance est au poids, comme le sinus de l'inclinaison du plan sur l'horizon, est au sinus total, ou comme la hauteur du plan est à sa longueur.

235. Il est aisé d'après cela d'expliquer la force de la machine dont on se sert communément pour descendre les tonneaux dans les caves. Cette machine participe en même temps à tous les avantages du treuil, de la poulie mobile, & du plan incliné. Les deux pieces de bois qui portent le treuil, sont appuyées, comme une échelle, contre le mur Fig. 116.

où se trouve l'entrée de la cave. Un des bouts de la corde qui embrasse le tonneau, est attaché à un rouleau lequel passe en travers au pied de l'échelle; l'autre bout est attaché au cylindre, & se développe peu-à-peu. Le tonneau fait alors l'office d'une poulie mobile.

Soit M le moment de la force appliquée aux leviers du treuil : soit r le rayon du cylindre ; $\frac{M}{r}$ exprimera la force qui tend chaque bout de la corde, & en supposant les deux bouts paralleles, on aura $\frac{2M}{r}$ pour l'expression de la force qui retient le poids P parallélement au plan incliné. Appellant donc A l'inclinaison du plan à l'horizon, on aura $\frac{2M}{r} : P :: \text{sin}\, A : 1$; d'où on tirera $2M = Pr\,\text{sin}\, A$.

Supposons maintenant que deux hommes soient appliqués aux leviers du treuil, & que la force qu'ils exercent conjointement soit de 200 ℔ ; supposons encore que le bras du levier par lequel agit leur résultante, soit dix fois aussi grand que le rayon du cylindre, & enfin que l'inclinaison du plan à l'horizon soit de 30°. On aura $P = 200 . 10 . 2 . 2 = 8000$ ℔; & par conséquent le poids que ces deux hommes soutiendront alors, sera de quatre-vingt quintaux. Ajoutez à cela l'effet du frottement qui dans cette circonstance favorise l'équilibre, autant qu'il nuit au mouvement.

236. Lorsqu'on suppose un corps en équilibre entre deux Fig. 117. plans inclinés AB, AC, il faut qu'il y ait, sur la verticale menée par son centre de gravité, un point G au moins, duquel ayant mené des perpendiculaires Gq, Gn sur ces deux plans, on ait ces mêmes perpendiculaires situées dans un

un ſeul plan vertical, de maniere qu'elles ne laiſſent pas du même côté tous les appuis du corps ſur chaque plan. Il faut donc que l'interſection commune des deux plans ſoit une droite horizontale *E F.*

Le poids du corps que nous pouvons repréſenter par *GM,* ſe décompoſe en deux forces *G Q*, *G N* qui expriment ſa double preſſion ſur les deux plans inclinés. Les appellant donc *Q* & *N*, & déſignant par *G* le poids du corps, nous aurons $G : Q : N :: GM : GQ : GN :: \sin QGN^{*} : \sin MGN : \sin MGQ :: \sin BAC : \sin CAE : \sin BAF.$

237. Puiſque chaque *Vouſſoir* d'une voûte eſt un corps retenu en équilibre ſur les deux vouſſoirs contigus, & que les faces de ces vouſſoirs ne ſont autre choſe que des plans inclinés, il faut donc, pour l'équilibre, que la verticale menée du centre de gravité ait au moins un de ſes points par lequel il ſoit toujours poſſible de mener une perpendiculaire ſur chacun des vouſſoirs contigus, en obſervant les conditions requiſes. Or chaque vouſſoir preſſant ainſi ceux qui le ſoutiennent, il faut de plus que la preſſion du vouſſoir *A* ſur le vouſſoir *B* ſoit égale & directement oppoſée à la preſſion réciproque que le vouſſoir *B* exerce contre le vouſſoir *A*. Les ſeules parties qui, dans une voûte, ne puiſſent pas réagir contre la preſſion du vouſſoir ſupérieur, ſont les deux baſes *F*, *G*, dont tout le poids repoſe ſur des plans horizontaux. Le reſte agit de proche en proche ſur les parties inférieures, qui éprouvant une preſſion latérale, la tranſmettent ſucceſſivement juſqu'aux baſes. Fig. 118.

Là cette pression se décompose en deux, l'une perpendiculaire & l'autre parallele à l'horizon. La premiere porte tout entiere sur les fondements, & celle-là est détruite : la seconde forme seule la *Poussée* de la voûte ; & rien n'est plus important dans la construction des voûtes, que l'art d'en détruire la poussée.

Si les murailles qui soutiennent une voûte sont bien solides & peu élevées, elles peuvent aisément détruire la poussée, par la simple résistance qu'oppose la liaison de leurs parties. Mais lorsque la voûte est très-haute & très-hardie, comme le sont celles de la plupart des grandes églises, alors leur poussée agissant par un levier fort étendu, fatigueroit considérablement les murs, & les renverseroit bientôt, si les Architectes n'avoient pas soin d'y pourvoir.

Le moyen qu'ils employent d'ordinaire, consiste à fortifier extérieurement les piliers de la voûte par des *Arcboutans* quelquefois massifs, mais plus souvent formés par de petites voûtes obliques qui propagent jusqu'à d'autres piliers moins élevés la poussée de la voûte principale ; & là son effort s'exerçant par un levier moins long, il faut une moindre résistance pour le détruire.

Au reste, quand il y a plusieurs voûtes de suite, la poussée qui agit aux extrémités, n'est pas plus grande, que celle d'une seule voûte égale aux autres pour l'étendue. Soit qu'un pont ait dix arches, soit qu'il n'en ait que quatre, l'effort général qu'il fait pour écarter ses appuis, est le même : il faut donc des *Culées* également fortes pour le soutenir.

238. Suppoſons deux corps A & B attachés au fil ACB, paſſant par deſſus la poulie C, & ſe faiſant équilibre ſur les plans inclinés ED, DF. Soit MN la verticale menée par le centre de gravité du corps A, & repréſentons par MN le poids de ce corps; on le décompoſera en deux forces l'une MO perpendiculaire au plan DE, l'autre MP ſuivant le fil CM. Fig. 119.

Faiſant une ſemblable décompoſition pour l'autre corps, QT ſera la force avec laquelle il tire le fil BCM. On aura donc pour l'équilibre $MP = QT$ ou $\frac{A\,\text{ſin}\,NMO}{\text{ſin}\,CMO} = \frac{B\,\text{ſin}\,RQS}{\text{ſin}\,CQS}$.

Et ſi les fils CA, CB étoient paralleles aux plans DE, DF, la derniere équation deviendroit $A\,\text{ſin}\,DEG = B\,\text{ſin}\,DFG$, que l'on peut mettre ſous cette forme, $A \cdot \frac{DG}{DE} = B \cdot \frac{DG}{DF}$. Il faudroit donc, en ce cas, que les poids des deux corps A & B fuſſent comme les longueurs des plans DE, DF ſur leſquels ils ſont appuyés.

[239. Mais ſi deux corps poſés ſur deux lames courbes AF, BE, étoient attachés aux extrémités d'un fil ACB qui paſsât par-deſſus la poulie infiniment petite C, comment déterminer la condition de leur équilibre? * Fig. 120.

On décompoſeroit pareillement en deux forces chacun des poids A & B; & comme nous repréſentons ici ces deux poids par les verticales Aa, Bb, on auroit pour l'une des forces Aa' ou Bb' dirigée ſuivant AN ou BM qui eſt perpendiculaire au plan incliné. L'autre ſeroit repréſentée par Aa'' ou Bb'' dont la direction eſt celle du fil même. On auroit donc pour l'équilibre, $Aa''=Bb''$; & en menant la ver-

ticale CNM, les triangles semblables donneroient 1°, Aa ou $A : Aa'' :: CN : CA$; 2°, Bb ou $B : Bb'' :: CM : CB$; donc $\frac{A.CA}{CN} = \frac{B.CB}{CM}$.

Cela posé, tirons deux lignes horizontales AP, BQ, faisons $CP = x$, $CQ = x'$, $CA = z$, $CB = z'$, $AP = y$, $BQ = y'$, & nous aurons la sounormale $PN = \frac{ydy}{dx}$ $CN = x + \frac{ydy}{dx} = \frac{xdx + ydy}{dx} = \frac{zdz}{dx}$, $CM = \frac{z'dz'}{dx'}$: ensorte que pour l'équilibre il faudra que $\frac{Adx}{dz} = \frac{Bdx'}{dz'}$. Or $z + z'$ est une quantité constante, donc $dz' = -dz$, ce qui réduit l'équation à celle-ci, $Adx + Bdx' = 0$, dont on peut faire l'application au problême suivant.

PROBLÊME.

240. La courbe AF étant donnée avec les poids A & B, & la longueur du fil ACB, trouver une seconde courbe EB, telle que ces deux poids étant placés par-tout où l'on voudra, sur les deux courbes, puissent y rester également en équilibre.

L'équation $Adx + Bdx' = 0$, ayant lieu dans tous les cas, son intégrale $Ax + Bx' = C$, nous apprend que le centre commun de gravité des deux poids A & B doit rester constamment sur la même ligne horizontale, quelque situation que l'on donne à ces deux corps. On sait en effet que la distance du point C à l'horizontale menée par le centre de gravité des corps A & B a pour expression, $\frac{Ax + Bx'}{A + B}$.

Si on appelle a la longueur du fil ACB, on aura $z + z' = a$, ou $z' = a - z$, seconde équation qui jointe à la premiere que nous venons de trouver, donnera d'une maniere

fort ſimple les valeurs de x' & de z' par celles de x & de z. Etant donc donné un point quelconque A de la courbe AF, on connoîtra auſſi-tôt le point correſpondant B de la courbe BE.

241. Suppoſons, par exemple, que la courbe AF ſoit un cercle qui ait ſon centre en N, & appellons r ſon rayon, c la ligne CN: nous aurons $zz = xx + rr - (c - x)^2 = rr - cc + 2cx$; & ſubſtituant $a - z'$ au lieu de z, $\frac{C - Bx'}{A}$ au lieu de x, nous trouverons pour la courbe cherchée EF l'équation, $2az' - z'z' = aa - rr + cc - \frac{2cC}{A} + \frac{2cB}{A}x'$.

Or la conſtante C étant arbitraire, on peut la ſuppoſer telle que $aa - rr + cc = \frac{2cC}{A}$; ce qui changera l'équation en celle-ci, $2az' - z'z' = \frac{2cB}{A}x'$, laquelle appartient à une épicycloïde dont les cercles générateurs ſont égaux.

Soit en effet ANE le cercle immobile, BNF le cercle mobile, r leur rayon, M le point décrivant, ſitué par-tout où l'on voudra ſur la ligne BMD. Les arcs révolus NE, NF étant égaux, le triangle ADB ſera iſoſcele, & menant MC parallele à AB, on aura AC conſtamment égal à MB; cette quantité ne variera donc pas. Cela poſé, rapportons la courbe au point fixe C, & faiſons $CM = z$, $CP = x$, $BM = AC = m$; on aura 1°, $AB - CM : CM :: AC : CD = \frac{mz}{2r - z} = DM$; 2°, par la propriété du triangle iſoſcele, $CM^2 = 2CD \cdot CP$, ou $zz = \frac{2mzx}{2r - z}$, ou bien encore $2rz - zz = 2mx$, équation parfaitement ſemblable à celle de la courbe que nous cherchions. FIG. 121.

242. Cette épicycloïde eſt ſuſceptible de trois formes différentes, ſelon que le point décrivant eſt pris ſur la cir-

conférence du cercle mobile, ou au-dehors ou au-dedans.
Fig. 122, 123 & 121. Dans le premier cas, le point *C* où doit ſe trouver la poulie, eſt un point de rebrouſſement : dans le ſecond, le point *C* eſt un point multiple, & la courbe a une petite *Feuille* : dans le troiſieme cas, ce même point eſt un *Point conjugué*, parce qu'il appartient réellement à la courbe. La preuve en eſt, que les valeurs $x = 0$, $z = 0$ ſatisfont à ſon équation. Mais en même temps ce point eſt iſolé, & ne conſerve en quelque ſorte, de communication avec la courbe, que par des rameaux imaginaires.

Pour décrire l'épicycloïde qui ſatisfait à la queſtion propoſée, il faudra donc prendre $CA = m = \frac{Bc}{A} = \frac{B}{A} CN$, & le rayon des deux cercles $= a =$ la longueur du fil. Alors le point *M*, à la diſtance $\frac{B}{A} CN$, du centre décrira l'épicycloïde demandée.

243. La conſtante a été déterminée, de maniere que la courbe fût aſſujettie à paſſer par la poulie *C*; ſi on l'avoit déterminée par quelque autre condition, la courbe, quoique différente, auroit pu ſe conſtruire par le moyen de l'épicycloïde précédente. On peut voir la ſolution du même problême dans les Actes de Leipſick, par M. le Marquis de l'Hôpital; on y trouvera les additions que MM. Leibnitz & ★ Bernoulli y firent.]

REMARQUE.

Les plans inclinés ſont d'un grand uſage, lorſqu'il faut ébranler des maſſes énormes, des vaiſſeaux par exemple, ſoit pour les lancer à l'eau, ſoit pour les ramener ſur le

rivage, quand on veut les radouber. Les tournants que l'on prend ſur la pente des montagnes eſcarpées, pour rendre le chemin plus facile, ſont encore une preuve ſenſible des avantages que procurent les plans inclinés. Plus la pente d'un eſcalier eſt douce, moins on eſt fatigué en le montant; parce que l'action de la peſanteur eſt d'autant plus affoiblie, que le plan incliné eſt plus long, ſa hauteur reſtant la même.

DE LA VIS.

244. La *Vis* eſt un cylindre droit *AQ*, revêtu d'un cordon ou *Filet* ſpiral dont la groſſeur eſt uniforme, & dont l'inclinaiſon à l'axe du cylindre eſt conſtamment la même dans toute ſa longueur. On appelle *Spire* un tour entier du filet de la vis, & l'intervalle qui ſépare deux ſpires conſécutives, ſe nomme *le pas de la vis*. Fig. 124.

En faiſant abſtraction du relief de cette machine, on pourra la regarder comme étant produite par des triangles rectangles *ABC*, *BDE*, &c. qui enveloppent le cylindre. Chacun de ces triangles a pour hauteur le pas de la vis, & pour baſe la circonférence du cylindre; enſorte que leurs hypoténuſes forment le filet. Fig. 125.

245. L'*Ecrou* eſt un ſolide ſillonné intérieurement, de maniere qu'il puiſſe s'inſinuer peu-à-peu dans ce filet, en rampant, pour ainſi dire, tout le long de ſes ſpires. On peut donc regarder un écrou, comme le moule de la partie de la vis qui s'y trouve engagée.

246. Tantôt la vis eſt fixe, & alors ſes filets gliſſant ſur

ceux de l'écrou, on fait mouvoir à son gré l'écrou même. Ces sortes de vis servent beaucoup pour unir fortement deux corps ensemble; on en voit dans la plupart des serrures. Mais il est encore plus ordinaire d'employer la vis mobile, quand il s'agit de casser ou de presser certains corps. En faisant tourner son cylindre, le filet de la vis s'introduit peu-à-peu dans les sillons de l'écrou, & il en résulte souvent une pression incroyable.

En général, quelque soit celui des deux cas précédents qui ait lieu, on pourra toujours regarder un point du filet mobile comme étant posé sur une portion infiniment petite MN d'un plan incliné AC qui auroit pour hauteur le pas de la vis, & pour base la circonférence du cylindre. Donc si plusieurs forces sollicitent ce point, il faudra, pour qu'elles se fassent équilibre, que leur résultante soit perpendiculaire à ce plan incliné.

Fig. 125.

247. Supposons, par exemple, que l'écrou soit fixe, & qu'une force quelconque P appliquée au levier AP tende à faire tourner la vis : il est clair qu'en cas de mouvement la vis doit avancer dans le sens de son axe. Imaginons donc qu'une puissance Q appliquée à l'extrémité de cet axe, contre-balance cet effort, & empêche la vis d'avancer; il s'agit de déterminer la condition nécessaire pour l'équilibre.

Fig. 124.

La puissance Q dirigée suivant l'axe peut se décomposer en autant d'autres puissances paralleles, qu'il y a de points dans le filet mobile. Soit donc représentée par $MG = q$, celle qui sollicite le point M parallélement à l'axe; soit MK

Fig. 126.

la

la force de rotation du point M, en vertu de la puissance P; & on verra que l'équilibre ne peut avoir lieu, si la résultante MH n'est pas perpendiculaire au plan incliné MN. Or il suit de cette condition que l'angle $HMG = KMN$, & que par conséquent $MK : q :: tang\, KMN : 1 ::$ la hauteur AB du pas de la vis est à la circonférence qui a pour rayon la distance du point M à l'axe de la vis. Désignant donc cette distance par r, la hauteur AB par h, & le rapport du diametre à la circonférence par c, on aura généralement, $g : MK :: 2cr : h$. Fig. 125.

Soit p une puissance infiniment petite qui à une certaine distance R de l'axe, soit capable d'imprimer par le moyen d'un levier, à la particule M du filet, la force de rotation MK; on aura, $MK : p :: Rr$, & de cette proportion multipliée par la précédente, il résultera $q :: p :: 2cR : h$.

248. Concluons donc que la force p appliquée au levier R pour faire tourner la particule M du filet, est à la force q parallele à l'axe, qui contre-balance cet effort, comme le pas de la vis est à la circonférence qui a pour rayon le bras du levier R. Comme ce rapport est constant, & qu'il a également lieu dans tous les points du filet de la vis, qui reposent sur le filet de l'écrou, on doit en inférer que la somme des puissances p, c'est-à-dire, la résultante P agissant par le bras R du levier, est à la somme de toutes les puissances q, c'est-à-dire, à leur résultante Q dirigée suivant l'axe de la vis, comme la hauteur du pas de la vis est à la circonférence qui a pour rayon R. Fig. 124.

Quelles que ſoient donc la figure & la groſſeur des ſpires d'une vis, & quelle que puiſſe être la quantité dont elles ſont engagées dans l'écrou, on aura toujours pour condition de l'équilibre à l'aide de cette machine, la proportion ſuivante.

249. *La puiſſance* P *qui tend à faire tourner la vis par le bras d'un levier* R *eſt à la force avec laquelle la vis tend à avancer ſuivant ſon axe*, ou ce qui eſt la même choſe, à la preſſion qu'elle peut exercer ſur un corps placé à ſon extrémité, ou enfin à la puiſſance Q qui lui fait équilibre, *comme le pas de la vis eſt à la circonférence que décriroit la puiſſance* P *en tournant autour du cylindre.*

La puiſſance aura donc toujours d'autant plus d'avantage pour comprimer les corps au moyen de la vis, que les ſpires en ſeront plus rapprochées, & que le levier ſur lequel elle agira, ſera plus long.

250. Au reſte le frottement qui eſt très-grand dans cette machine favoriſe beaucoup l'équilibre, mais il nuit par proportion au mouvement. Une vis immobile, par exemple, étant ſuppoſée verticale, comme celles des preſſoirs, ſon écrou ſouvent fort lourd, devroit naturellement deſcendre par ſon propre poids, en tournant & en gliſſant dans le ſens du filet de la vis. Cependant à quelque hauteur qu'il ſoit élevé, il y reſte en équilibre, juſqu'à ce qu'une puiſſance étrangere l'oblige de tourner & de deſcendre : il faut donc que le frottement ſoit bien conſidérable dans un preſſoir, ſurtout quand on n'a pas l'attention d'en faciliter le jeu avec des graiſſes ou des huiles. Cet obſtacle au mouvement s'accroît

encore par les degrés de chaleur que contractent les ſpires de la vis & les ſillons de l'écrou, à meſure que les efforts de la puiſſance redoublent. Auſſi n'eſt-il pas rare de voir ces ſortes de machines ſe rompre avec éclat, quand on les aſſujettit à de longues épreuves, principalement dans les grands froids.

Quoi qu'il en ſoit, la force de la vis pour comprimer les corps peut être pouſſée à un point dont il eſt difficile de ſe faire une juſte idée. Il faut avoir vu en grand les effets de cette machine, pour imaginer au moins à-peu-près tout le parti que l'on peut en tirer ſuivant les différentes circonſtances. Nous ne connoiſſons à Paris, rien de plus curieux en ce genre, que la ſalle des preſſes de la Manufacture du Tabac.

251. La *Vis d'Archimede*, ou la *vis ſans fin* ne differe de la vis ſimple, que par une roue dentée que l'on adapte à celle-ci. La puiſſance Q appliquée à la manivelle BCQ fait tourner le cylindre AB; ce cylindre eſt garni de deux ſpires E & F qui engrenent la roue dentée GHI. La roue porte ſur ſon axe un cylindre K autour duquel s'enveloppe la corde qui ſuſpend le poids P. FIG. 127.

Or le point touchant G d'une dent quelconque de la roue, peut être regardé comme un écrou infiniment petit, mobile ſur la vis AB. Donc le pas de la vis eſt à la circonférence qui a pour rayon BC, comme la puiſſance Q appliquée à la manivelle, eſt à la force avec laquelle le point G du filet de la vis pouſſe la dent de la roue. Cette force eſt donc $= \frac{Q \cdot cir\,BC}{EF}$.

Et si on appelle r le rayon du cylindre, R le rayon de la roue, on aura pour le moment de la force appliquée en G, l'expression $\frac{Q \cdot circ\, BC}{EF} \cdot R$, qui doit être égale à Pr, expression du moment du poids. Ainsi *dans la vis sans fin, il faut pour l'équilibre, que la puissance appliquée à la manivelle soit au poids, comme le produit du rayon du cylindre par le pas de la vis, est au produit du rayon de la roue par la circonférence que décrit la manivelle.*

Si on prend donc le rayon de celle-ci dix fois plus grand que le pas de la vis, & le rayon de la roue dix fois plus grand que celui du cylindre, on trouvera que la puissance Q qui feroit alors équilibre au poids P, ne seroit que la 314[ieme] partie de ce poids. Elle deviendroit encore bien moindre, si on la faisoit agir au bout d'une file de semblables machines unies les unes aux autres de la maniere suivante.

252. Représentez-vous la puissance Q tournant la manivelle d'une premiere vis sans fin qui engrene sa roue dentée. On donne un pignon à cette roue, lequel fait tourner une seconde vis sans fin qui engrenant sa roue dentée, fait tourner, par le moyen du pignon de cette roue, une troisieme vis sans fin. Celle-ci mene enfin une roue dont le cylindre s'enveloppe de la corde qui suspend le poids; & on sent bien qu'il seroit facile de multiplier à son gré cette suite d'engrenages. Or le calcul fait voir que la puissance Q n'équivalant qu'au simple poids d'une livre, doit contre-balancer un poids P de 279253 livres, en supposant que les différentes parties de la machine ayent ces dimensions.

Le rayon de la manivelle..........	168 lignes.
Sa circonférence en aura donc.......	1056
Le rayon de la premiere roue........	96
Le rayon de la ſeconde.............	90
Celui de la troiſieme..............	85
Celui du premier pignon............	20
Celui du ſecond pignon.............	18
Celui du cylindre..................	16

De plus on ſuppoſe que la ſeconde vis ſans fin a 14 lignes de rayon, à l'endroit où elle touche le premier pignon, & qu'elle n'en a que 9 à l'endroit où elle engrene ſa roue dentée. La troiſieme vis ſans fin a 8 lignes de rayon à ſon point de contact avec le ſecond pignon; elle en a 6 au point de ſon engrenage avec la troiſieme roue. Les ſpires de la premiere vis ſans fin ſont éloignés d'une ligne. Cela poſé, on trouve aiſément que dans une telle machine l'équilibre a lieu, toutes les fois que la puiſſance eſt au poids, comme le produit d'un pas de la premiere vis multipliée d'abord par le rayon du cylindre, enſuite par les rayons des deux pignons, & enfin par ceux ſuivant leſquels les deux dernieres vis agiſſent ſur leurs roues reſpectives, eſt au produit de la circonférence de la manivelle, multipliée par les rayons des trois roues, & par les rayons ſuivant leſquels les deux dernieres vis agiſſent ſur les pignons des deux premieres roues. On a donc pour le cas préſent,

$Q : P :: 1 . 20 . 9 . 18 . 6 . 16 : 1056 . 14 . 90 . 8 . 85 :: 1 : 279253.$

DU COIN.

FIG. 128. 253. LE *Coin* eſt une eſpece de priſme triangulaire fait ordinairement d'une matiere très-dure, comme du fer par exemple. On ſait que les principaux uſages auxquels il eſt employé, ſont de diviſer & de fendre différents corps. Les triangles ABC, FDE ſont les deux *baſes* du coin, CE en eſt le *tranchant*, $BDCE$, $ACEF$ en ſont les deux *faces*, & $AFBD$ en eſt la *tête*. C'eſt-là qu'agiſſent verticalement les efforts de la puiſſance.

FIG. 129. 254. Suppoſons que le coin ABC eſt introduit dans la fente déja commencée VXY, & que la puiſſance P donne un coup de marteau ſur la tête du coin. L'effort qui réſulte de ce coup, étant dirigé ſuivant QMN doit être décompoſé en deux autres dont chacun eſt perpendiculaire à une des deux faces AC, BC du coin, ou aux parties tangentes VX, XY; ſans quoi la réſiſtance de ces plans ne pourroit leur faire équilibre. Il y a donc ſur la direction QMN un point M, duquel on puiſſe mener à travers les faces AC, BC du coin une perpendiculaire ſur chacune des deux parties intérieures du corps déja fendu. Repréſentons par MN la force P, & décompoſons-là en deux autres MK, ML ſuivant les lignes MV, MY perpendiculaires aux faces du coin. Cela poſé, les triangles KMN, ABC ayant tous leurs côtés reſpectivement perpendiculaires; nous aurons

$$MN : SM : SN :: AB : BC : CA;$$

& par conféquent la force fuivant MK a pour valeur $\frac{P.BC}{AB}$, & la force fuivant $ML = \frac{P.AC}{AB}$.

255. Suppofons préfentement que la bafe du coin étant fixe, la force qui agit fur fa tête fuffife pour que la rupture foit près de fe confommer jufqu'en O : dans cette hypothefe, la réfiftance R que la partie VXO oppofe aux efforts de la puiffance qui veut la féparer de l'autre partie OXY, doit être regardée comme faifant équilibre fur le levier $VXRO$, à l'action MK de la puiffance.

Menant donc les perpendiculaires OR, OS fur les directions de cette réfiftance & de la force MK, on aura pour l'équilibre, $R.OR = \frac{P.AC.OS}{AB}$; d'où on tirera $P : R : OR.AB : AC.OS$; & tel eft le rapport que doivent avoir entr'elles la puiffance appliquée fur la tête du coin, & la réfiftance qu'elle éprouve de la part du corps qu'il s'agit de fendre. On a une proportion femblable pour l'autre partie du corps, & on doit en conclure généralement que le coin aura d'autant plus de force, qu'il fera plus aigu.

256. Mais comme la réfiftance R de la partie VXO & la perpendiculaire OR menée fur fa direction font des quantités extrêmement variables, tant par la nature même des corps que l'on veut fendre, que par la difpofition particuliere de leurs fibres qui n'ont pas toutes à beaucoup près la même flexibilité, on ne doit pas s'attendre à établir jamais rien de certain fur leur véritable mefure. Ainfi, quoique le coin foit une machine bien fimple, fa théorie phyfique, quand on le regarde comme un inftrument propre à féparer

les parties des corps, n'en eſt pas moins obſcure.

Tous les outils tranchants ſe rapportent plus ou moins directement à cette machine. Les raſoirs, les haches, les rabots, les clous, nos dents, ſur-tout les inciſives, le bec des oiſeaux, les cornes & les griffes des animaux, ne ſont autre choſe que des coins avec leſquels s'opérent dans tous les corps, des diviſions ſans nombre.

RÉFLEXIONS GÉNÉRALES SUR LES MACHINES.

257. QUAND deux puiſſances ſont une fois en équilibre, il eſt aiſé de faire prévaloir l'une ſur l'autre, en ſecondant, même foiblement, ſes efforts. Le point eſſentiel dans la théorie des machines ſe réduit donc à déterminer les conditions qui leur ſont propres, pour établir un parfait équilibre entre deux puiſſances oppoſées. C'eſt auſſi ce que nous avons tâché de faire dans cette derniere partie de la Statique.

Il réſulte des principes que nous y avons expoſés, qu'il eſt toujours facile de mettre une puiſſance médiocre en état d'en vaincre une très-grande. Il ſuffit pour cela d'employer une ou pluſieurs machines ſimples, diſpoſées de maniere à produire l'effet que l'on ſe propoſe. Mais en augmentant la force, on tombe dans un inconvénient inévitable, qui eſt une diminution de vîteſſe dans le mouvement du poids; d'où réſulte par conſéquent une perte de temps. Rien n'eſt plus

aiſé

aisé sans doute de faire surmonter par un seul homme, la résistance qui en exigeroit trente; mais aussi cet homme ne fera-t-il qu'en trente jours l'ouvrage qui eût été fait en un seul par trente ouvriers réunis ensemble.

258. L'expérience d'accord en ce point avec la théorie, établit donc comme un fait constant, que *dans toutes les machines on perd du côté de la vîtesse ce que l'on gagne du côté de la force :* ou ce qui revient au même, on perd toujours en temps ce que gagne la puissance. Réciproquement si on employe une force considérable, on peut gagner en vîtesse.

Dans le treuil, par exemple, la puissance fait le tour de la roue, pendant que le poids ne fait que le tour du cylindre. Ainsi la vîtesse de la puissance est à celle du poids, comme la circonférence de la roue est à celle du cylindre, ou comme le rayon de la roue est à celui du cylindre : or, dans le cas d'équilibre, ce dernier rapport est le même que celui du poids à la puissance. On perd donc dans le mouvement ce que l'on avoit gagné dans l'équilibre.

En appliquant cette remarque à la vis mobile, on verra qu'elle n'avance que d'un pas dans son écrou, pendant que la puissance fait un tour. La vîtesse de celle-ci est donc à celle de la vis suivant l'axe, ou à celle de la puissance comprimée, comme la circonférence décrite par la force motrice est au pas de la vis. Ce rapport ne differe donc pas de celui de la puissance qui empêche le mouvement de la vis suivant son axe, à la puissance qui la fait tourner, dans le cas d'équilibre.

259. Mais, en général, quelle que soit la machine au moyen de laquelle deux puissances P & Q se font équilibre, on peut imaginer qu'elles parcourent dans un même instant les espaces infiniment petits dp & dq, qui doivent être proportionnels aux deux vîtesses, puisque les temps sont égaux. Or pour que les masses P & Q animées des vîtesses dp & dq puissent se maintenir en équilibre, il faut que leurs quantités de mouvement soient égales : il faut donc que $P\,dp = Q\,dq$, d'où on tire $Pp = Qq$.

Cette derniere équation fait voir que dans toutes les machines, *l'équilibre ne peut avoir lieu qu'entre deux puissances telles que si on les mettoit en mouvement, elles parcourroient en même temps des espaces qui leur seroient réciproquement proportionnels*. Or ce principe démontre d'une maniere générale ce que nous venons d'établir, que la puissance perd dans le mouvement ce qu'elle gagne dans l'équilibre.

Il est vrai que pour appliquer ce principe aux différentes machines, on est obligé de les supposer en mouvement, ce qui répugne à l'état d'équilibre : mais cette supposition n'étant que conditionnelle, elle ne peut nuire à la solidité du principe dont il s'agit ici. Prenons pour exemple deux corps suspendus aux extrémités d'un levier. On sait qu'ils y doivent rester en équilibre, toutes les fois que leurs poids sont en raison inverse des bras sur lesquels ils agissent. Or dans ce cas il est évident que si par impossible il survenoit du mouvement dans le levier, les espaces parcourus par les deux poids seroient en raison inverse de

ces mêmes poids : puiſque ces eſpaces étant des arcs ſemblables décrits par les deux bras du levier, leur rapport ſeroit le même que celui de leurs rayons.

On pourroit donc, à l'imitation de Deſcartes, de s'Graveſande, & de pluſieurs autres, aſſeoir les fondements de la Statique ſur le principe dont nous venons de parler. Les conditions particulieres de l'équilibre dans toutes les machines ſimples s'en déduiſent avec beaucoup de facilité, & comme ſon application eſt très-générale, il n'eſt pas ſurprenant que pluſieurs Auteurs lui aient donné la préférence ſur la méthode que nous avons ſuivie. Mais ce principe ne paroît pas aſſez direct, pour ſervir de baſe à une théorie ſuſceptible d'ailleurs d'une démonſtration rigoureuſe.

260. Ce ſeroit ici le lieu d'entrer dans le détail des machines compoſées : mais outre que ce détail ſeroit immenſe, chacun peut aiſément y ſuppléer, en prenant pour modele ce qui a été dit des mouffles, des rouages & de la vis ſans fin. Toute la difficulté conſiſte à trouver, pour le cas d'équilibre, le rapport de la puiſſance au poids. Or ce rapport réſulte toujours du produit de tous les rapports particuliers que l'équilibre exige dans chaque machine ſimple qui entre dans la compoſition de celle que l'on veut calculer. On pourroit dire auſſi que ce rapport eſt toujours l'inverſe des eſpaces que parcourent en même temps les deux puiſſances.

Mais comme le frottement modifie beaucoup les effets des machines, ſur-tout lorſqu'elles ſont compoſées, on ne peut ſe diſpenſer d'y avoir égard, quand on veut les calculer avec

une certaine précision. Faute d'apprécier au moins en partie ce que les forces mouvantes employent de leur énergie, pour vaincre les frottements, on est exposé à des mécomptes non moins grossiers que dispendieux. Je dis, en partie; car on ne peut pas se flatter d'évaluer au juste cette perte, tant il y entre d'éléments variables.

261. Le frottement en effet provient de la résistance qu'il faut surmonter pour faire mouvoir un corps sur un autre. Or cette résistance varie à l'infini : car elle est produite par l'adhésion mutuelle des parties saillantes d'un corps & des parties rentrantes de l'autre. Les surfaces les mieux polies ne sont pas exemptes de ces petites inégalités : on voit, au moyen d'un microscope, qu'elles en sont tout hérissées. Mais cette adhésion exige une certaine force pour être vaincue : il faut nécessairement rompre les liens qui la forment, si on ne peut pas en dégager autrement le mobile; sans quoi il n'y auroit pas de mouvement.

262. L'expérience fait bien voir que le frottement suit à-peu-près le rapport de la pression, c'est-à-dire, qu'un corps qui repose par une de ses faces sur un plan quelconque, & qui exige une certaine force pour être mis sur le point de se mouvoir, n'exigeroit que la moitié de cet effort, si son poids, ou en général, si la puissance qui le presse sur son appui, étoit diminuée de moitié.

263. L'expérience apprend encore qu'en faisant mouvoir un parallélepipede sur ses faces les plus inégales, on éprouve à-peu-près la même résistance de la part du frotte-

ment : & de-là quelques Physiciens ont conclu d'après M. Amontons (*Mém. de l'Ac. Roy. des Sc. an.* 1699, 1703 & 1704) que les surfaces n'entrent pour rien dans l'estimation de cette résistance. Il sembleroit pourtant que plus un corps est étendu, plus ses points de contact se multiplient, & plus par conséquent l'effort qu'il faut faire pour fléchir ou pour briser toutes ces petites pointes, doit être grand. Mais si d'un côté les points d'appui sont plus nombreux, cela est compensé de l'autre côté, par la diminution du poids que chacun a pour lors à soutenir : car les aspérités du mobile s'enfonçant moins profondément dans les cavités du plan, il faut un moindre effort pour les en retirer.

Cette compensation au reste n'est pas tellement exacte, sur-tout lorsque le poli des parties frottantes est différent, que l'on ne doive pas compter la grandeur des surfaces parmi les causes du frottement. Le temps influe aussi sur cette cohésion réciproque des corps; puisque leurs éminences & leurs cavités s'engagent d'autant plus les unes dans les autres, qu'elles ont éprouvé plus long-temps les effets de la pression. C'est un fait établi par l'expérience & avoué par tous les Physiciens. Et de-là vient qu'un corps mis une fois en mouvement, n'éprouve plus autant de résistance qu'il en éprouvoit au moment où il a commencé de se mouvoir.

264. Non-seulement la durée de la superposition de deux corps augmente la difficulté de les faire mouvoir, mais encore les divers degrés de température & d'humidité dans l'Atmosphere contribuent beaucoup à rendre très-variables

les effets du frottement. Tout le monde ſait qu'une porte, qu'une fenêtre, &c. ne s'ouvre pas avec la même facilité, dans un temps fort humide. Ajoutez à cela que les fibres du plan réſiſtent plus ou moins, ſuivant le ſens du mouvement, & ſuivant le degré de flexibilité qui leur eſt propre. Comptez encore toutes les variations qu'entraînent avec elles les qualités particulieres de certains corps qui ſemblent avoir entr'eux une telle *Affinité*, pour parler le langage de la Chymie, que leur adhéſion en eſt beaucoup plus forte : & certainement vous conclurez que rien n'eſt moins débrouillé dans ce qui a rapport aux forces mouvantes, que la théorie des frottements. L'expérience eſt ici, comme par-tout ailleurs, le guide le plus sûr : on ne ſauroit donc trop la conſulter ; & voici une maniere d'en tirer des réſultats ſur leſquels on puiſſe compter.

Fig. 130. 265. Soit M un corps poſé ſur le plan horizontal AB & tiré ſuivant QC par le poids P, au moyen du fil QCP, que l'on ſuppoſe paſſer ſur la poulie C. Il eſt clair que le frottement eſt ici le ſeul obſtacle au mouvement du corps M, puiſque tout l'effort de ſa peſanteur eſt détruit par le plan ſur lequel il repoſe. Sans cet obſtacle, la moindre puiſſance P ſuffiroit donc pour le faire mouvoir horizontalement. Cela poſé, prenez pour P différents poids, juſqu'à ce que vous en trouviez un qui ſoit ſur le point de mettre le corps en mouvement : & vous aurez alors un moyen bien ſimple de connoître le frottement.

Prolongez enſuite la direction CQ juſqu'à ce qu'elle

rencontre en M la verticale MN menée par le centre de gravité; repréſentez par MN le poids du corps, & par MV la force P, vous aurez la diagonale MT pour la réſultante de ces deux forces. Cette réſultante ſera inclinée d'une certaine quantité ſur l'horizontale AB; & c'eſt l'angle de ſon inclinaiſon MTN que l'on appelle l'*Angle du frottement.*

Or la tangente de cet angle eſt au rayon, comme la force du frottement eſt à la preſſion. Connoiſſant donc ce dernier rapport, il ſera facile de déterminer l'angle du frottement; & ſi comme on l'a obſervé ſouvent dans certains corps, le frottement eſt le quart de la preſſion, on conclura que l'angle du frottement eſt celui dont la tangente eſt quadruple du rayon. Cet angle eſt donc de $75^\circ\ 58'$, ainſi que les tables le donnent.

266. En général, pour qu'un corps ſoit ſur le point de ſe mouvoir, il faut que la réſultante des forces qui lui ſont appliquées, faſſe avec la ſurface frottante un angle égal à l'angle du frottement. De plus, le point T de la baſe AB, par lequel paſſe cette réſultante, ne doit pas ſortir de la baſe, ſans quoi le corps ſe renverſeroit.

267. On peut déterminer auſſi la réſiſtance que produit le frottement, en poſant un corps quelconque dont le poids ſoit connu, ſur un plan AB mobile autour de l'axe horizontal A, & en inclinant ce plan, juſqu'à ce que le corps ſoit ſur le point de gliſſer. Alors ſon poids repréſenté par MT, ſe décompoſera en deux forces, l'une MN perpendiculaire au plan, l'autre MV qui lui ſera parallele. La Fig. 131.

premiere eſt totalement détruite par la réſiſtance du plan, la ſeconde eſt détruite par le frottement, & lui eſt par conſéquent égale. Donc la force du frottement eſt au poids du corps, comme le ſinus de l'inclinaiſon du plan ſur l'horizon eſt au ſinus total. L'angle MTN du frottement eſt donc égal à l'angle CAB du plan avec la verticale.

268. Or cet angle une fois connu, on peut avoir égard aux effets du frottement, dans l'uſage des machines. Prenons le treuil pour exemple, & ſuppoſons la roue IKO & le
Fig. 132. cylindre LGF dans un même plan, le tout mobile autour de l'eſſieu ou *Boulon* CNT. Soient prolongées les directions PO, QF de la puiſſance & du poids, juſqu'au point de concours M, & ſoit MT la direction de la réſultante.

Cela poſé, s'il n'y avoit aucun frottement à vaincre, cette réſultante ſeroit dirigée ſuivant MNC vers le centre C, c'eſt-à-dire, perpendiculairement à la ſurface du boulon : mais dans le cas du frottement, il faut qu'elle faſſe avec le boulon un angle MTN égal à l'angle du frottement. Quelque ſoit la valeur de cet angle, que nous appellerons f, on connoîtra dans le triangle CMT les deux côtés CT, CM, & l'angle $CTM = 90° + f$: on trouvera donc $\frac{CT . cof f}{CM}$ pour l'expreſſion du ſinus de l'angle CMT, que nous déſignerons par φ. Soit $A =$ l'angle CMP, ſoit $B =$ l'angle CMF; & on aura $PMT = A - \varphi$, & $TMF = B + \varphi$. Mais puiſque MT eſt la direction de la réſultante des deux forces P & Q, on a $P : Q :: \mathit{fin}\, TMF : \mathit{fin}\, TMP :: \mathit{fin}\,(B + \varphi) : \mathit{fin}\,(A - \varphi)$; & c'eſt-là le rapport que doivent avoir

avoir entr'elles les puiſſances P & Q pour ſe faire équilibre dans le treuil.

Si on ſuppoſe paralleles les directions de P & de Q, on pourra regarder comme infiniment petits les angles A, B, φ; & alors on aura $P : Q :: \text{ſin}\, B + \text{ſin}\, \varphi : \text{ſin}\, A - \text{ſin}\, \varphi$. Or $\text{ſin}\, A = \frac{CO}{CM}$, $\text{ſin}\, B = \frac{CF}{CM}$, & $\text{ſin}\, \varphi = \frac{CT \,\text{coſ}\, f}{CM}$. Donc $P : Q :: CF + CT \,\text{coſ}\, f : CO - CT \,\text{coſ}\, f$.

REMARQUE I.

269. Il y a toujours, dans l'hypotheſe du frottement, deux valeurs entr'autres à donner à la puiſſance pour ſoutenir le poids, l'une plus grande, l'autre plus petite que ſi le frottement n'avoit pas lieu. Car prenant $NT' = NT$, la réſultante peut être dirigée ſuivant MT', ſans que l'équilibre en ſoit altéré, puiſque cette réſultante fait encore avec la ſurface du boulon un angle égal à l'angle du frottement.

Dans le premier cas, qui eſt celui que nous avons examiné d'abord, & dans lequel MT eſt la réſultante de deux forces miſes en équilibre, on a $P : Q :: \text{ſin}\, TMF : \text{ſin}\, TMO$; & il eſt clair que la puiſſance a moins d'avantage alors que s'il n'y avoit pas de frottement : mais dans le ſecond cas, où l'on a $P : Q :: \text{ſin}\, T'MF : \text{ſin}\, T'MO$, il eſt clair auſſi que les efforts de la puiſſance ſeroient moindres, que s'il n'y avoit aucun frottement.

En ſuppoſant paralleles les directions des puiſſances P & Q, on trouvera que les deux valeurs de P, l'une plus grande, l'autre plus petite que lorſqu'il n'y a point de frottement, ſont $\frac{Q(CF + CT \,\text{coſ}\, f)}{CO - CT \,\text{coſ}\, f}$, & $\frac{Q(CF - CT \,\text{coſ}\, f)}{CO + CT \,\text{coſ}\, f}$.

Exemple.

Supposant paralleles les directions de la puissance & du poids, soit le rayon CO de la roue vingt fois plus grand que celui du boulon ; soit le rayon CF du cylindre quatre fois plus grand que celui du boulon ; soit enfin la force du frottement égale au quart de la pression. On aura $\tang f = 4$, ou $\cos f = \frac{1}{\sqrt{17}}$: & les deux valeurs de P qui suffiront pour mettre le poids Q sur le point de monter ou de descendre, seront exprimées par $\frac{Q(4\sqrt{17}+1)}{20\sqrt{17}-1}$ & $\frac{Q(4\sqrt{17}-1)}{20\sqrt{17}+1}$, qui en faisant le calcul, se réduisent à $0{,}2147\,Q$ & $0{,}1852\,Q$. La premiere est en effet plus grande que $\frac{1}{5}Q$, & la seconde est plus petite.

On peut appliquer cette solution à un levier qui tourneroit autour d'un boulon, en regardant CO & CF comme les perpendiculaires menées du centre du boulon sur les directions des puissances. On l'appliqueroit aussi à la poulie fixe, en faisant $CO = CF$.

Remarque II.

270. Au reste, quand bien même on réussiroit à établir enfin une théorie claire & solide sur la résistance occasionnée par les frottements, il resteroit encore une difficulté presque insurmontable dans les moyens d'en faire l'application. Car cette théorie, de quelque généralité qu'elle pût être d'ailleurs, n'en exigeroit pas moins, pour être appliquée avec succès, que des expériences réitérées, uniformes & sur-tout extrêmement variées pour chaque cas d'équilibre

& de mouvement, fissent connoître avec une certaine précision le degré de cette résistance. Or il ne paroît pas vraisemblable que l'on puisse jamais réduire à des regles constantes les faits déja connus qui y ont rapport, bien moins encore la foule immense de ceux qui restent à connoître. Le poli des surfaces est susceptible d'une si grande variété, sans qu'il y ait aucune échelle de comparaison qui en fasse distinguer les degrés, qu'il n'en faudroit pas davantage pour ôter tout espoir d'une théorie généralement applicable aux effets du frottement. Mais il s'en faut bien que ce soit là le seul obstacle à l'existence d'une pareille découverte. La pression, la grandeur, la nature, la direction & la vîtesse des surfaces frottantes, les variations de l'Atmosphere, &c, sont ici des éléments nécessaires; & on sait jusqu'à quel point tant de causes différentes jettent de l'incertitude dans les résultats des expériences. On ne doit donc attendre des calculs relatifs au frottement qu'une approximation plus ou moins exacte, & souvent tâtonnée, sur-tout pour les machines exécutées en grand.

REMARQUE III.

271. On ne manque pas de moyens pour diminuer les frottements, soit en polissant bien les surfaces, soit en les séparant par des rouleaux, soit en les oignant de quelque matiere grasse, & principalement en évitant de faire mouvoir des corps homogenes les uns sur les autres. Car l'expérience prouve que des métaux différents se meuvent avec plus de facilité, soit en glissant, soit en tournant, & s'usent

par conséquent beaucoup moins, en frottant l'un contre l'autre, que diverses parties du même métal que l'on feroit mouvoir les unes sur les autres. L'acier, par exemple, se meut plus facilement sur du cuivre que sur de l'acier. Il y a même du choix à faire parmi les corps hétérogenes, pour faciliter de plus en plus leur mouvement. Ainsi l'acier tourne plus aisément dans du cuivre jaune, que dans du cuivre rouge, que dans du plomb ou de l'étain. Ce sont des faits établis par l'expérience à laquelle il faut avoir principalement recours en pareille matiere.

272. Mais si avec toutes ces précautions on peut diminuer les effets du frottement, il ne faut pas croire que l'on puisse jamais venir à bout de les détruire. C'est donc une chimere qu'une machine sans frottement : c'en est donc une autre que le *Mouvement perpétuel* tant vanté, tant cherché par quelques Machinistes, & presque toujours le ridicule objet de leurs folles dépenses. Pour qu'ils pussent se flatter de produire enfin ce *Grand-œuvre* de la Méchanique, il faudroit auparavant imaginer quelque moyen de rendre aux forces motrices ce que les frottements inévitables leur font perdre de toute nécessité. Or cette réproduction est impossible, si on n'appelle pas de temps en temps au secours quelque puissance étrangere qui les ranime, soit en rebandant des ressorts, soit en remontant des poids, soit en donnant de quelque autre maniere l'impulsion, le mouvement & la vie à ces sortes d'automates.

REMARQUE IV.

273. Les moyens d'augmenter le frottement ſont encore plus multipliés & plus faciles que ceux de le diminuer. Mais la plupart ſont ſi connus qu'il ſeroit inutile de les rappeller ici. Perſonne n'ignore leur utilité dans les Arts méchaniques & dans preſque tous les uſages de la vie. C'eſt par le frottement que les limes, les rapes, les ſcies, & généralement tous les outils de ce genre agiſſent ſur les corps les plus durs. C'eſt par le frottement auſſi que l'on polit les métaux, les glaces, les diamants mêmes. Si avant de deſcendre des montagnes un peu rudes, on enraye les voitures, ce n'eſt que pour retarder leur marche, en augmentant le frottement ; & ſi pour jetter l'ancre ou pour la lever, on facilite les manœuvres en faiſant faire au cable qui la ſoutient, quelques tours ſur le cylindre du cabeſtan, ce n'eſt encore que pour augmenter la réſiſtance du frottement. Une ſeule cheville qui frotte contre l'*Arbre* d'un moulin ſuffit pour arrêter toute l'impétuoſité du vent, ou de l'eau. On ſait avec quelle force les ſillons d'un écrou frottent contre le filet de la vis, &c, &c.

REMARQUE V.

On croit aſſez généralement qu'une puiſſance n'a jamais plus d'énergie pour ſoutenir un poids en équilibre ſur un plan horizontal ou incliné, que lorſque ſa direction eſt parallele au plan ; mais cette aſſertion n'eſt vraie qu'en faiſant abſtraction des effets du frottement : car on trouve

par le calcul, que pour faire mouvoir un corps quelconque ſur un plan horizontal, en ayant égard à ces effets, & en les ſuppoſant égaux au tiers de la preſſion, la direction la plus favorable que l'on puiſſe donner à la puiſſance eſt celle qui fait avec le plan, un angle de 18° 27′ à-peu de choſe près.



SECONDE PARTIE
DE
LA MÉCHANIQUE
OU
LA DYNAMIQUE.

274. QUAND les puissances qui sollicitent un corps au mouvement, ne sont pas en équilibre, ce corps doit nécessairement se mouvoir; & si après une premiere impulsion, les puissances cessent tout-à-coup d'agir sur le mobile, & l'abandonnent à lui-même, on voit bien que son mouvement doit être uniforme & rectiligne. Mais si parvenu au bout d'un certain temps au point *B* de sa direction *ABC*, il y est sollicité suivant *BE* par quelqu'autre puissance, alors représentant par *BC* la vîtesse qu'il avoit suivant *AB*, & par *BE* la vîtesse qu'il vient de recevoir, on aura la diagonale *BD* du parallélogramme *BEDC*, pour exprimer sa direction & sa vîtesse effectives. Fig. 133.

Pareillement, si à quelque point *D* de cette direction, une nouvelle puissance agit sur le mobile, & lui imprime la

vîtesse DH, on prendra sur le prolongement de BD, une ligne DG pour représenter la vîtesse suivant BD, & achevant le parallélogramme $DHFG$, on trouvera que la diagonale DF exprime la direction que ce corps doit prendre, & la vîtesse avec laquelle il doit se mouvoir.

En continuant le même procédé, on conçoit aisément que tout corps ainsi sollicité par des impulsions successives, doit parcourir les côtés d'un même polygone : & s'il ne les décrit pas avec la même vîtesse, au moins les décrira-t-il uniformément chacun en particulier. Appellant donc s un côté quelconque du polygone, t le temps employé à parcourir ce côté, & u la vîtesse du mobile pendant qu'il le parcourt, on aura $u = \frac{s}{t}$; mais ces trois quantités peuvent être différentes pour les différents côtés du polygone.

275. Supposons maintenant qu'une force accélératrice agisse sur le mobile, à chaque instant infiniment petit, c'est-à-dire, sans la moindre interruption : il est clair que la ligne décrite sera composée d'une infinité de petites diagonales, dont la suite formera un arc de courbe, tant que la direction de la force accélératrice ne conspirera pas avec celle du mobile. Chacune de ces diagonales sera donc un des éléments infiniment petits, ds, de la courbe décrite, & dt sera l'élément du temps t employé à parcourir l'arc entier s. Ainsi la formule générale de la vîtesse d'un tel mobile sera $u = \frac{ds}{dt}$.

276. Si le corps se meut en ligne droite, & si la puissance accélératrice agit dans sa direction, elle augmentera à chaque

chaque inſtant la vîteſſe du mobile, d'une quantité infiniment petite du. Mais cette quantité ne ſera pas la même pour tous les inſtants, à moins que la force accélératrice ne ſoit conſtante. Or puiſque cette force imprime dans l'inſtant dt la vîteſſe du, il eſt clair qu'en agiſſant également dans l'inſtant ſuivant, elle imprimeroit une vîteſſe égale du; enſorte que ſi le mobile n'éprouvoit d'autre action que celle d'une telle force, il auroit à la fin du ſecond inſtant, une vîteſſe $2du$. Cette action répétée pendant un nombre n d'inſtants, produiroit donc la vîteſſe ndu, au bout du temps ndt.

Soit $ndt = 1$, ou $n = \frac{1}{dt}$; on aura pour l'expreſſion de la vîteſſe acquiſe dans une unité de temps, $\frac{du}{dt}$. Appellons p cette quantité, qui ne peut manquer d'être connue, puiſque c'eſt elle qui meſure l'intenſité de la force accélératrice : nous aurons donc $du = p\,dt$, expreſſion également propre à repréſenter l'accroiſſement ou la diminution de vîteſſe que la force accélératrice produit dans le mobile, ſelon que ſa direction conſpire avec celle du mouvement, ou qu'elle lui eſt directement oppoſée.

277. La quantité p eſt variable, toutes les fois que la force accélératrice n'eſt pas conſtante; car nous entendons ici par p la vîteſſe que l'intenſité actuelle de la force accélératrice répétée également & continuellement pendant une unité de temps, produiroit dans un mobile uniquement ſoumis à ſon action. Il eſt aſſez ordinaire cependant d'entendre par p la force accélératrice elle-même : mais ſi on veut avoir

des idées claires sur ces premiers principes de Dynamique ; il ne faut point perdre de vue la seule maniere exacte de considérer les puissances. Or nous avons dit (25) qu'elles ne doivent ni ne peuvent entrer en considération, qu'à raison des effets qu'elles produisent.

Si toute leur action s'exerce dans un instant, il en résulte dans le mobile une certaine quantité de mouvement, dont la mesure fait toujours connoître leur énergie : mais s'il est question d'une force accélératrice qui agit inégalement à chaque point de la route du mobile, il faut, pour en mesurer les divers effets, supposer pour un moment que cette force est constante, & voir ensuite ce que son action répétée également & continuellement pendant une unité de temps, pourroit produire de vîtesse dans le corps soumis à son impulsion.

278. Cette vîtesse que nous avons appellée p est très-propre à faire connoître l'intensité de la force accélératrice, dans un point déterminé, quel qu'il soit, puisqu'en supposant que la valeur de p devienne double, l'accélération doit être double aussi, p étant en général proportionnelle à du. D'ailleurs la valeur de p variant à chaque point de l'espace que parcourt le mobile ; elle marquera les degrés d'accélération que la force motrice doit produire à tel ou tel point. On voit donc que la quantité p ne doit entrer dans le calcul, que comme simple mesure des effets produits par la force accélératrice, & que la maniere la plus simple d'apprécier cette force, est de faire connoître la valeur de p.

279. Après cette courte exposition du vrai sens qu'il

faut donner à la formule $du = pdt$, nous dirons avec tous les Géometres modernes, que l'*élément de la vîtesse est égal au produit de la force accélératrice par l'élément du temps.* Mais nous convenons que cet énoncé, commode pour sa briéveté, pécheroit absolument du côté de l'exactitude, si on n'y attachoit pas une juste idée de ce qu'il faut entendre par p. Il en est de ces expressions comme de tant d'autres consacrées par l'usage ; elles deviennent toutes indifférentes pour quiconque les a une fois bien conçues.

280. Au reste, quoique la formule $du = pdt$ n'ait lieu que pour les mouvements rectilignes troublés par une force accélératrice, elle peut s'appliquer aisément aux mouvements curvilignes. Pour cela, soit Mm l'élément infiniment petit que le corps est censé avoir décrit dans l'instant dt. Si après l'avoir parcouru, il n'étoit sollicité par aucune autre puissance, il continueroit de se mouvoir uniformément en ligne droite dans sa premiere direction Mmm', & l'instant suivant dt', ou $dt + ddt$ il parcourroit l'espace $mm' = \frac{ds\,dt'}{dt}$. Fig. 134.

Supposons donc qu'il est sollicité au point m par des puissances quelconques ; on pourra les réduire toutes à deux, l'une T suivant Mmm', l'autre N perpendiculaire à Mmm'. La premiere est généralement connue sous le nom de *Force Tangentielle* : on appelle la seconde, *Force Normale.* La force tangentielle accélérera la vîtesse du mobile dans la direction mm', & le fera parvenir en un point quelconque m'' au bout du temps dt' : ainsi l'accroissement de la

vîtesse sera $du = T\,dt'$. La force normale, au contraire, n'altérera point le mouvement du corps : mais elle changera sa direction, & lui fera parcourir un petit espace $m''\mu$. perpendiculaire à $m m''$. Or la vîtesse nécessaire pour le parcourir dans l'instant dt' est exprimée par $\frac{m''\mu}{dt'}$, & cette vîtesse étant imprimée par la force accélératrice N, on aura $\frac{m''\mu}{dt'} = N\,dt'$, ou $m''\mu = N\,dt'^2$.

En vertu de ces deux forces & de la vîtesse qu'a déja le corps sur sa *Trajectoire*, il se trouvera au point μ après l'instant dt', & il aura décrit le second élément $m\mu$ ou $ds + dds$ de la ligne de son mouvement. Soit R le rayon osculateur de la courbe qu'il doit décrire ; on aura $m''\mu = \frac{ds^2}{R}$; & les trois équations relatives au mouvement seront $u = \frac{ds}{dt} \ldots du = T\,dt' \ldots ds^2 = R \,.\, N\,dt'^2$. Mais puisque $dt' = dt + ddt$, ces équations étant homogenes, on pourra substituer dt à dt', ce qui les changera en celles-ci. $u = \frac{ds}{dt} \ldots du = T\,dt \ldots ds^2 = R \,.\, N\,dt^2$ ou $u^2 = R \,.\, N$; & c'est au moyen de ces équations que l'on peut déterminer pour chaque point de la trajectoire, la vîtesse d'un corps sollicité par des puissances quelconques, dans tous les cas du moins où cette ligne se trouve dans un même plan.

281. Ces premieres notions une fois établies, nous allons entrer en matiere, & traiter par ordre les principales questions de la Dynamique. On peut les réduire à trois. Dans la premiere, nous considérerons le mobile comme un point libre qui peut également obéir à toutes les sollicitations des puissances accélératrices. Dans la seconde,

nous regarderons encore le mobile comme un point, mais nous ſuppoſerons qu'il doit ſe mouvoir ſur une ligne ou ſurface donnée : enſorte que les forces par leſquelles il ſera ſollicité au mouvement, ne pourront qu'accélérer ou retarder ſa vîteſſe dans cette trajectoire déja tracée. Nous examinerons enfin dans la troiſieme le mouvement des points qui agiſſant les uns contre les autres, troublent par cette action mutuelle leurs mouvements reſpectifs, & delà nous déduirons le mouvement des corps conſidérés comme ayant un volume fini. Tels ſeront les principaux objets des trois Sections de la Dynamique.

282. Mais avant d'entrer dans aucun détail, nous répéterons les vraies ſignifications des quantités u & p dans les équations fondamentales, $u = \frac{ds}{dt} \ldots du = p\,dt$: car il eſt important que l'on en ait des idées claires & préciſes.

Par u il faut donc entendre ici une quantité variable qui exprime pour chaque inſtant l'eſpace qu'un mobile quelconque pourroit parcourir dans une unité de temps, ſi ſon mouvement devenoit tout-à-coup uniforme & rectiligne. u eſt donc la vîteſſe dont le mobile ſeroit animé, ſi les forces accélératrices ceſſoient tout-à-coup d'agir.

Nous entendons par p une autre quantité variable qui exprime pour chaque inſtant la vîteſſe que la force accélératrice, devenue conſtante, ſeroit capable d'imprimer au mobile, en répétant également & continuellement ſon action pendant une unité de temps.

283. Au reſte, les deux formules $u = \frac{ds}{dt} \ldots du = p\,dt$,

en donnent deux autres, $u\,du = p\,ds \ldots p\,dt = d\left(\frac{ds}{dt}\right)$, dont l'application & l'ufage s'étendent également fur prefque tous les objets que nous allons difcuter. On va voir, en effet, que la plus grande partie de ces difcuffions confifte à appliquer ces quatre formules à différentes valeurs de p.

SECTION I.

Du Mouvement d'un point libre sollicité par des Puissances quelconques.

On peut confidérer le mouvement d'un point libre dans deux états différents, fuivant que ce point fe meut dans le *Vuide*, ou dans un *Milieu réfiftant*.

Article I.

Du Mouvement d'un point libre follicité par des puiffances quelconques, dans le vuide.

284. Le premier objet qui fe préfente dans cette théorie, comprend en général tous les mouvements rectilignes ; mais comme celui des corps graves eft le plus utile, nous nous attacherons fpécialement à en bien faire connoître toutes les circonftances.

La gravité, comme nous l'avons dit ailleurs, eft une force accélératrice conftante qui exerce fur tous les corps une action continuelle fuivant des directions perpendiculaires à

l'horizon. Supposons donc qu'un corps quelconque tombe du repos suivant une ligne verticale : la gravité agira sur lui, & le sollicitera sans cesse. Il sera donc animé par une force accélératrice constante que l'on peut appeller g ; ainsi nous aurons pour l'équation de son mouvement, $du = g\,dt$ dont l'intégrale est $u = gt$.

285. Cette formule nous apprend déja que *dans la chûte des corps graves, la vîtesse acquise croît à proportion du temps écoulé depuis l'origine du mouvement.*

Si on intégre aussi l'équation $u\,du = g\,ds$, on aura $uu = 2gs$, qui en substituant g^2t^2 à la place de u^2, donnera $s = \frac{1}{2}gt^2$. Nouveau résultat général qui nous fait voir que *les espaces parcourus depuis l'origine du mouvement sont toujours proportionnels aux quarrés des temps.*

Et comme les vîtesses acquises sont proportionnelles aux temps, on peut dire aussi que dans le mouvement des corps graves, les espaces parcourus sont toujours proportionnels aux quarrés des vîtesses acquises. Or ces deux équations $u = gt \ldots s = \frac{1}{2}gt^2$, qui renferment la troisieme $uu = 2gs$, suffisent dans tous les cas pour déterminer les circonstances relatives au mouvement des corps graves, quand on connoît une fois la quantité constante g ; & on n'a rien négligé de ce qui pouvoit en procurer une exacte connoissance.

286. Des expériences multipliées, faites avec tout le soin que l'on pouvoit attendre des Physiciens les plus habiles, & confirmées sur-tout par les résultats les plus uniformes de la théorie des Pendules, ont constaté d'une ma-

niere très-sûre les loix de l'accélération produite dans les corps graves en vertu de la pesanteur. On sait par exemple que sous la latitude de Paris un corps abandonné à lui-même parcourt dans la premiere seconde de sa chûte, 15 pieds & $\frac{1}{10}$, ou plus exactement, 15,098 pieds. Supposant donc que l'on compte le temps par secondes, & l'espace par pieds, on aura $t = 1$, toutes les fois que $s = 15,098$. Ainsi en substituant ces valeurs dans l'équation $s = \frac{1}{2} g t^2$, elle deviendra $15,098 = \frac{1}{2} g$; d'où on déduit $g = 30,196$, valeur qui représente très exactement la force de la gravité, & qui dans le mouvement des corps graves tient lieu de cette force accélératrice p dont la formule $du = p\,dt$ fait mention en général.

287. La valeur de g ainsi déterminée, il suffira de connoître une des trois quantités u, s, t, pour déterminer immédiatement la valeur des deux autres, au moyen des équations, $u = gt \ldots s = \frac{1}{2} g t^2 \ldots uu = 2gs$.

EXEMPLES.

I. On demande combien il faudroit de temps pour qu'un corps abandonné à lui-même tombât de 400 pieds de haut ?... L'équation $s = \frac{1}{2} g t^2$ donne $t^2 = \frac{400}{15,098} = 26,4935$; donc $t = \sqrt{26,4935} = 5\frac{1}{7}$. Il faudroit donc $5''\frac{1}{7}$ pour que ce corps descendît de la hauteur proposée.

II. On demande quelle seroit la vîtesse de ce même corps à la fin de sa chûte ?... L'équation $uu = 2gs$ donne en y substituant les valeurs connues, $uu = 2 \cdot 30,196 \cdot 400 = 24156,8$; donc $u = \sqrt{24156,8} = 155\frac{1}{7}$. Ce corps parcourroit

courroit donc 155 pieds $\frac{3}{7}$ par feconde, fi la gravité n'agiffoit plus fur lui, du moment où il feroit defcendu de 400 pieds de haut.

III. Trouver la profondeur d'un puits au fond duquel on fait qu'un corps ne parvient qu'au bout de 7″? . . . Prenez l'équation $s = \frac{1}{2} g t^2$, & fubftituez-y les valeurs de g & de t, vous trouverez que $s = 15{,}098 \,.\, 49 = 739$ pieds $\frac{4}{5}$.

IV. La profondeur de ce puits étant de 739 pieds $\frac{4}{5}$, & le temps de la chûte étant de 7″, combien de pieds doit parcourir le corps dans la premiere feconde? . . . Les efpaces parcourus font proportionnels aux quarrés des temps; on a donc $49 : 1 :: 739$ pieds $\frac{4}{5} : x = 15{,}098$, comme l'équation $\frac{1}{2} g = \frac{s}{t^2}$ le donne immédiatement.

V. De quelle hauteur faut-il qu'un corps tombe pour acquérir une vîteffe de 400 pieds par feconde? . . . Si vous prenez la valeur de s dans l'équation $uu = 2gs$, vous trouverez $\frac{160000}{60{,}392}$, qui fe réduit à $2649\frac{1}{3}$. La hauteur demandée doit donc être de 2649 pieds $\frac{1}{3}$; enforte que fi après l'avoir parcourue, le corps n'éprouvoit plus l'action de la pefanteur, il conferveroit à perpétuité dans le vuide, une vîteffe uniforme qui lui feroit parcourir 400 pieds par feconde.

Ces formules peuvent fervir à vérifier la Table fuivante. Elle a été calculée d'après la fuppofition qu'un corps grave abandonné à lui-même parcourt dans la premiere feconde de fa chûte 15 pieds 1 pouce 1 ligne $\frac{7}{9}$; ce qui ne differe de 15, 098 pieds que d'un tiers de ligne, en moins. Voyez Muffchenbroek, *Introductio ad Philofophiam naturalem.*

TEMPS en Secondes.	ESPACE parcouru.			VITESSE acquise.		
1	15 Pi.	1 Po.	$1\frac{7}{9}$	30 Pi.	2 Po.	$3\frac{5}{9}$
2	60	4	$7\frac{1}{9}$	60	4	$7\frac{1}{9}$
3	135	10	4	90	6	$10\frac{6}{9}$
4	241	5	$5\frac{4}{9}$	120	9	$2\frac{2}{9}$
5	377	4	$8\frac{4}{9}$	150	11	$4\frac{6}{9}$
6	543	5	4	181	1	$9\frac{3}{9}$
7	739	8	$3\frac{1}{4}$	211	4	$\frac{8}{9}$
8	966	1	$5\frac{7}{9}$	241	6	$4\frac{4}{9}$
9	1222	9	0	271	8	8
10	1509	6	$8\frac{7}{9}$	301	10	$11\frac{5}{9}$
...	....			....		
...	....			....		
20	6039	11	$3\frac{1}{9}$	603	9	$11\frac{1}{9}$
...	....			....		
...	....			....		
30	13587	0	4	905	8	$8\frac{6}{9}$
...	.....			....		
...	.....			....		
40	24153	0	$\frac{4}{9}$	1209	0	$6\frac{2}{9}$
...	.....			.....		
...	.....			.....		
50	37739	1	$5\frac{4}{9}$	1509	6	$9\frac{7}{9}$
...	.....			.....		
...	.....			.....		
60	54344	5	4	1811	5	$9\frac{3}{9}$

288. On appelle *Hauteur dûe à une vîtesse* celle d'où un corps pesant devroit tomber pour acquérir cette vîtesse. Soit h la hauteur convenable, soit u la vîtesse qui en résulte, on

aura $uu = 2gh$. *Les vîteſſes acquiſes ſont donc proportionnelles aux racines quarrées des hauteurs qui leur ſont dûes.* L'uſage de ces hauteurs eſt fort commun dans les ouvrages de Dynamique, depuis que les Géometres modernes les ont introduites dans leurs calculs, au lieu des vîteſſes mêmes dont elles donnent la meſure.

289. Si le corps, en tombant, avoit reçu une certaine vîteſſe verticale, on pourroit appeller h la hauteur dûe à cette vîteſſe, & alors le mobile ayant parcouru l'eſpace s feroit dans le même cas que s'il étoit tombé de la hauteur $h + s$. Ainſi on auroit pour équations de ſon mouvement $u = gt + \sqrt{2gh} \ldots s + h = \frac{1}{2}g\left(t + \frac{\sqrt{2h}}{g}\right)^2$, ou $s = \frac{1}{2}gt^2 + t\sqrt{2gh}$.

290. Suppoſons maintenant qu'un corps ſoit lancé de bas en haut avec la vîteſſe V, & qu'il s'agiſſe de déterminer ſon mouvement. Nous reprendrons pour cela l'équation $du = pdt$, en obſervant que la vîteſſe du mobile eſt continuellement retardée par l'action g de la peſanteur. Il faudra donc écrire $-du = gdt$. Or ſi on integre cette équation de maniere que u devienne V, lorſque $t = 0$, on aura $u = V - gt$; & cette valeur étant ſubſtituée dans l'équation $ds = udt$, on trouvera $ds = Vdt - gtdt$ dont l'intégrale eſt $s = Vt - \frac{1}{2}gt^2$. Ces deux équations ſont évidentes par elles-mêmes; car le corps conſerveroit toujours la vîteſſe V, s'il n'étoit pas retardé dans ſon mouvement par la peſanteur. Donc puiſque la peſanteur imprime au bout du temps t la vîteſſe gt en ſens contraire, il faut néceſſairement que celle du mobile devienne $V - gt$. Il faut auſſi que l'eſpace par-

couru à la fin du mouvement soit tel que la seconde intégrale $s = Vt - \frac{1}{2} g t^2$ le donne : car si la pesanteur n'agissoit pas sur le mobile, il parcourroit dans le temps t l'espace Vt; donc puisque l'action de la pesanteur retarde son mouvement, & le fait descendre de la quantité $\frac{1}{2} g t^2$, l'espace qu'il pourra parcourir doit se réduire à $Vt - \frac{1}{2} g t^2$.

291. La premiere équation $u = V - gt$ prouve que le mobile continuera de monter, jusqu'à ce que $V = gt$, c'est-à-dire, jusqu'à ce que la gravité lui ait imprimé en sens contraire une vîtesse égale à celle de projection. Alors il se trouvera élevé à la hauteur dûe à la vîtesse V: mais à peine l'aura-t-il atteinte, que toute la force projectile étant épuisée, celle de la pesanteur reprendra le dessus. Le corps descendra donc comme du repos, suivant les loix que nous connoissons, & il employera à descendre, le même temps qu'il avoit mis à monter.

292. Par-là, on peut aisément connoître à quelle élévation est parvenu un corps jetté verticalement en l'air, toutes les fois que l'on connoît le temps écoulé depuis l'origine de son mouvement jusqu'à l'instant de sa chûte. Supposons, par exemple, qu'une bombe sortant du mortier suivant une direction verticale, retombe au bout de 18 secondes. Elle a dû s'élever pendant 9″, à une hauteur exprimée par 15, 098 pieds multipliés par 81, puisque les espaces parcourus sont comme les quarés de temps; ainsi sa plus grande élévation doit être de 1223 pieds.

293. La formule $uu = 2gh$ fait voir que si deux corps

sont soumis à l'action de deux gravités différentes, ils ne peuvent acquérir la même vîtesse, qu'en tombant de deux hauteurs réciproquement proportionnelles aux forces de ces gravités. On pourroit donc éprouver par ce moyen si la force de la pesanteur est la même dans les différents lieux de la terre : mais nous verrons dans la suite que les oscillations des pendules sont beaucoup plus propres à vérifier ce qui en est.

294. La gravité, au reste, agit généralement sur tous les corps, de maniere qu'ils pesent tous les uns vers les autres & vers un centre déterminé. Son action ne se borne pas aux corps sublunaires, elle paroît s'étendre sur l'univers entier. Telle est du moins la base du systême de Newton. Il fit sentir d'abord la nécessité de reconnoître dans le Soleil & dans toutes les Planetes, cette force universelle, nommée *Attraction* ou *Gravitation*, par laquelle toutes les parties qui les composent, & tous les corps qui les entourent, gravitent vers leurs centres respectifs. Calculant ensuite les effets de cette gravitation, par rapport aux corps posés sur les surfaces du Soleil, de Jupiter, de Saturne & de la Terre, il prouva qu'ils étoient entr'eux dans le rapport de ces quatre nombres, 10000, 943, 529, 435. Appliquant donc à ces résultats la formule $uu = 2gh$, on voit que les hauteurs dont un corps quelconque devroit tomber près de la surface de ces astres, afin d'acquérir une même vîtesse, seroient respectivement comme $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{943}$, $\frac{1}{529}$, $\frac{1}{435}$.

295. En général, on pourroit déterminer le mouvement des corps graves près du soleil & de ces deux Planetes, en

ſubſtituant au lieu de g dans les équations $u = gt$, $s = \frac{1}{2}gt^2$; la quantité $\frac{10000}{435} \cdot 30,196$ pour le Soleil, la quantité $\frac{943}{435} \cdot 30,196$ pour Jupiter, & $\frac{529}{435} \cdot 30,196$ pour Saturne. Ainſi la force accélératrice près de la ſurface du Soleil ſeroit $695\frac{4}{5}$; elle ſeroit $65\frac{3}{5}$ près de la ſurface de Jupiter, & $36\frac{4}{5}$ près de Saturne, pendant qu'auprès de la Terre, cette même force eſt $30\frac{1}{5}$. Delà on pourroit inférer avec raiſon que les eſpaces parcourus par un corps quelconque abandonné à ſa ſeule gravité, ſeroient pour la premiere ſeconde de ſa chûte, 348 pieds ſur la ſurface du Soleil, 32 pieds $\frac{4}{5}$ ſur celle de Jupiter, 18 pieds $\frac{2}{5}$ ſur celle de Saturne, & 15 pieds $\frac{1}{10}$ ſur la Terre.

Des Forces centrales.

Fig. 135. 296. On appelle *Forces Centrales* ou *Centripetes*, celles qui ſollicitent continuellement un mobile vers un point déterminé. Soit un corps en A qui pouſſé par une force quelconque dirigée vers C deſcende du repos, on demande quelles doivent être les principales circonſtances de ſon mouvement?

Appellons x l'eſpace AM parcouru dans un temps t, u la vîteſſe au point M, & a la diſtance AC. Cela poſé, ſi la force centrale agit en raiſon compoſée des diſtances, de maniere que l'expoſant de cette raiſon ſoit n, & ſi on appelle f une diſtance du point C, qui ſoit telle que l'action de cette force s'y trouve égale à celle de la gravité g, on aura la valeur qui convient à la force accélératrice en M, par la proportion ſuivante,

$$f^n : g :: (a-x)^n : \frac{g(a-x)^n}{f^n}.$$

D'où on conclura (283) $u\,du = \frac{g\,dx\,(a-x)^n}{f^n}$; & appellant h la hauteur dûe à la vîtesse u, ce qui donne $uu = 2gh$, & $u\,du = g\,dh$, on aura $dh = \frac{dx\,(a-x)^n}{f^n}$. L'intégrale de cette derniere équation est $h = \frac{C-(a-x)^{n+1}}{(n+1)f^n}$: or le mobile ayant commencé au point A de se mouvoir, on doit avoir en même temps $h = 0$, & $x = 0$, ce qui donne la valeur de la constante $C = a^{n+1}$. Donc $h = \frac{a^{n+1}-(a-x)^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Mais quand on connoît une fois la hauteur h dûe à la vîtesse u, cette vîtesse se détermine aussi-tôt par l'équation $u = \sqrt{2gh}$.

Le seul cas qui échappe à la formule précédente, est celui ou $n = -1$. Alors la force centrale agit en raison inverse de la distance, & pour déterminer la valeur de h, il faut intégrer par logarithmes. L'intégration donne $h = fl\,\frac{a}{a-x}$.

297. Si l'exposant $n+1$ est positif, on trouvera que la hauteur dûe à la vîtesse qu'aura le mobile, en arrivant au centre C, est $\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$, parce qu'alors $x = a$: mais si $n+1$ est un nombre négatif $-m$ (auquel cas la valeur générale de h est $\frac{f^{m+1}}{ma^m} \cdot \frac{a^m-(a-x)^m}{(a-x)^m}$) cette valeur devient infinie en supposant $x = a$. Ainsi la vîtesse du corps arrivant au centre, feroit alors infinie, ce qui est aisé à concevoir, puisque la force centrale agit avec d'autant plus d'efficacité que le mobile est plus près du centre.

Dans ce même cas cependant, si le corps tomboit d'une

hauteur infinie, ou ſi le point A étoit infiniment éloigné du centre C, il n'auroit en arrivant au point M qu'une vîteſſe finie : car en poſant a & x infinies dans la valeur générale de h, on en déduit $h = \frac{f^{m+1}}{m(CM)^m} = \frac{f^{-n}}{m(CM)^{-n-1}}$. Si par exemple la force centrale agit en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, on aura $h = \frac{f^2}{CM}$: donc la vîteſſe d'un corps qui deſcendroit d'une hauteur infinie, ſeroit réciproquement comme la racine quarrée de l'eſpace qui lui reſteroit à parcourir pour arriver au centre.

298. Si $n = 1$, ou ſi la force centripete eſt proportionnelle aux diſtances du centre, on aura $h = \frac{2ax - xx}{2f}$; & puiſque $dt = \frac{dx}{u} = \frac{dx}{\sqrt{2gh}}$, il faudra pour connoître t, intégrer l'expreſſion $\sqrt{\frac{f}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$. Or l'intégrale eſt $\sqrt{\frac{f}{g}} \cdot Arc\ cof \frac{a-x}{x}$; donc appellant c la demi-circonférence, on aura pour le temps de la deſcente juſqu'au centre C la quantité conſtante $\frac{c}{2}\sqrt{\frac{f}{g}}$.

299. Si $n = -2$, ou ſi la force centripete agit en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, comme les obſervations les plus conſtantes ſemblent l'établir, on aura $h = \frac{ff}{a} \cdot \frac{x}{a-x}$; & $dt = \frac{\sqrt{a}}{f\sqrt{2g}} \cdot dx\sqrt{\left(\frac{a-x}{x}\right)} = \frac{\sqrt{a}}{f\sqrt{2g}} \cdot \frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax-xx)}}$. Or $\frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax-xx)}}$ peut ſe décompoſer en $\frac{(\frac{1}{2}a - x)dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$ & $\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$. La premiere partie eſt la différentielle de $\sqrt{(ax-xx)}$; la ſeconde eſt celle d'un arc de cercle dont le ſinus verſe eſt x, le diametre du cercle étant a. On a donc $t = \frac{\sqrt{a}}{f\sqrt{2g}}\left(\sqrt{(ax-xx)} + \frac{1}{2}a \cdot Arc\ cof\left(\frac{\frac{1}{2}a - x}{\frac{1}{2}a}\right)\right)$;

intégrale

intégrale à laquelle il ne faut pas ajouter de constante, parce qu'elle s'évanouit, lorsque $x = 0$. Supposant donc $x = a$, on connoîtra le temps que le corps doit employer à parvenir au centre, par la formule $\frac{\frac{1}{2} c a \sqrt{a}}{f \sqrt{2 g}}$; & cette quantité étant proportionnelle à $a \sqrt{a}$, il s'ensuit généralement que *les temps pendant lesquels deux corps descendent du repos vers le centre des forces, sont comme les racines quarrées des cubes des hauteurs parcourues.*

300. Si la force centrale eût été supposée constante, & toujours la même qu'au point A où sa valeur est $\frac{gff}{aa}$, alors le mobile auroit parcouru l'espace a, d'un mouvement uniformément accéléré, & on auroit déterminé le temps par la formule $a = \frac{1}{2} . \frac{gff}{aa} t^2$, qui donne $t = \frac{2 a \sqrt{a}}{f \sqrt{2 g}}$. D'où il suit que le temps employé à parcourir l'espace a d'un mouvement uniformément accéléré, lorsque la force centrale est toujours la même qu'au commencement du mouvement, est au temps employé à parcourir le même espace, lorsque la force centrale augmente en raison inverse du quarré de la distance :: $2 : \frac{1}{2} c :: 4 : c$, ou comme le rayon est à la huitieme partie de la circonférence, ou à-peu-près comme 14 est à 11.

Ce que nous venons de dire des mouvements rectilignes, suffit pour les déterminer quelle que soit la force accélératrice. Il n'y a qu'à substituer la valeur de p dans l'équation $u\,du = p\,ds$, ou $g\,dh = p\,ds$, après quoi il ne s'agit plus que d'intégrer. Examinons donc maintenant les mouvements curvilignes.

PROBLÊME.

301. UN corps étant sollicité par des forces accélératrices quelconques, & ayant reçu au commencement de son mouvement une certaine vîtesse de projection suivant une direction quelconque, de maniere qu'il soit obligé de se mouvoir dans une orbite ou trajectoire curviligne, on demande comment on peut déterminer la nature de cette orbite, le degré de vîtesse que doit avoir le corps en un point quelconque, & le temps qu'il employeroit à parvenir à un point donné.

FIG. 136. Soit $AMm\mu$ la courbe que décrira le mobile, soit AP l'axe de cette courbe, mN la normale, mT la tangente au point m. Appellons à l'ordinaire $AP = x$, $PM = y$, $Mm = ds$, la vîtesse au point $M = u$, la hauteur dûe à cette vîtesse $= h = \frac{uu}{2g}$, le temps employé à parcourir l'arc $AM = t$, & le rayon osculateur $R = \frac{-ds^3}{dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$.

Cela posé, réduisons toutes les forces qui sollicitent le mobile à deux autres forces l'une N suivant la normale mN, l'autre T suivant la tangente mT : & puisque nous avons déja (280) les équations $ds = udt \ldots du = Tdt \ldots N.R = uu = 2gh$, nous pourrons conclure d'abord de la derniere que la force normale est à celle de la gravité, comme la hauteur dûe à la vîtesse du mobile est à la moitié du rayon osculateur. Nous conclurons ensuite des deux équations $ds = udt \ldots du = Tdt$, que l'on a $udu = Tds$,

dont l'intégrale eſt $uu = 2\int T ds$. Donc puiſque $uu = N.R$, on aura $N.R = 2\int T ds$.

Or cette derniere équation ne renfermant ni u ni t, puiſque les forces N & T ſont des fonctions de x & de y, il faudra faire trois intégrations pour avoir l'équation finie de la trajectoire demandée. Celle-ci une fois connue, on déterminera la vîteſſe & le temps par les formules $uu = 2\int T ds$... $t = \int \frac{ds}{u}$. Et telle eſt, en général, la voie que l'on peut ſuivre pour parvenir à la ſolution de ce problême. Mais cette voie, quoique très-naturelle, n'eſt pourtant pas la plus ſimple dans bien des cas : en voici une autre qui nous paroît mériter la préférence.

302. Tout corps qui ſe meut ſur une ligne courbe, peut être conſidéré, comme ayant deux mouvements, l'un parallele à l'abſciſſe x, l'autre parallele à l'ordonnée y. Car ſi en vertu du premier mouvement il peut parcourir l'eſpace Mr ou dx, dans l'inſtant dt, & ſi en vertu du ſecond il peut parcourir dans le même inſtant l'eſpace rm ou dy, on voit bien qu'il doit parcourir réellement la petite diagonale Mm ou ds. Sa vîteſſe ſuivant l'axe AP ſera donc exprimée par $\frac{dx}{dt}$; nous la déſignerons par vîteſſe horizontale, & ſa vîteſſe ſuivant PM, que nous appellerons la vîteſſe verticale, ſera repréſentée par $\frac{dy}{dt}$. Sa vîteſſe effective ſera $\frac{ds}{dt}$.

Or quelles que puiſſent être les forces qui le ſollicitent, on peut toujours les réduire à deux, l'une X dans la direction de MR, parallele à x, l'autre Y dans la direction de MQ, parallele à y. La premiere accélere le mouvement

horizontal, la seconde accélere le mouvement vertical; & puisque l'accroissement de la vîtesse est toujours égal (279) au produit de la force accélératrice par l'élément du temps, on aura les deux équations $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = X\,dt \ldots\ldots$ $d\left(\frac{dy}{dt}\right) = Y\,dt$, qui jointes à l'équation ordinaire $ds = u\,dt$, serviront à déterminer le mouvement du corps.

303. Au reste, ces équations ne different point, quant au fonds, de celles qui précedent. On peut s'en assûrer en multipliant la premiere par $\frac{dx}{dt}$; & la seconde par $\frac{dy}{dt}$; car si on ajoute les produits, on aura $\frac{dx}{dt}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) = X\,dx + Y\,dy$; or $\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2} = uu$; donc $\frac{dx}{dt}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) = u\,du = X\,dx + Y\,dy$.

Maintenant, si on effectue les différentiations indiquées dans les deux équations ci-dessus, on aura $dt\,ddx - dx\,ddt = X\,dt^3 \ldots dt\,ddy - dy\,ddt = Y\,dt^3$, d'où éliminant ddt, il viendra $dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right) = dt^2\,(Y\,dx - X\,dy)$; & puisque le rayon osculateur $R = \frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$, on trouvera en substituant, $\frac{ds^3}{R} = dt^2\,(X\,dy - Y\,dx)$, ou $\frac{uu}{R} = \frac{X\,dy - Y\,dx}{ds}$. Cette derniere équation & celle que nous venons de trouver, $u\,du = X\,dx + Y\,dy$ sont donc équivalentes aux deux équations $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = X\,dt \ldots d\left(\frac{dy}{dt}\right) = Y\,dt$.

Or en décomposant 1°, la force X suivant MR, en deux autres forces, l'une tangentielle suivant Mm, & exprimée par $\frac{dx}{ds}X$, l'autre normale dans la direction de MN, ayant pour valeur $\frac{dy}{ds}X$. 2°, En faisant subir la même décomposi-

tion à la force Y suivant MQ, en deux forces dont l'une Tangentielle, sera représentée par $\frac{dy}{ds}Y$, & l'autre Normale, par $-\frac{dx}{ds}Y$, on trouvera que la force tangentielle totale $T=\frac{Xdx+Ydy}{ds}$, & que l'autre force totale $N=\frac{Xdy-Ydx}{ds}$. Ces deux équations $udu=Tds \ldots uu=N.R$, équivalent donc à celles que le calcul vient de nous donner: ainsi la conformité de ce double résultat est une preuve de la bonté des deux méthodes.

Application au mouvement des Projectiles.

304. Pour rendre cette théorie plus claire, appliquons-là à un cas particulier; & supposons, par exemple, que la gravité seule trouble le mouvement d'un corps projetté suivant AV avec une vîtesse donnée V, sous un angle $VAP=a$. FIG. 137.

Dans cette hypothese on a $Y=-g \ldots X=0$, ce qui donne les deux équations suivantes, $d\left(\frac{dx}{dt}\right)=0 \ldots d\left(\frac{dy}{dt}\right)=-g\,dt$, dont les intégrales sont $\frac{dx}{dt}=C$, & $\frac{dy}{dt}=C'-gt$. La premiere fait voir que la vîtesse horizontale est constante, comme cela doit être, puisque ce mouvement n'est point altéré. Or $V\,cos\,a$ exprime la vîtesse horizontale initiale, & $V\,sin\,a$ exprime la vîtesse verticale initiale, on a donc $C=V\,cos\,a$, & $C'=V\,sin\,a$, ce qui change les intégrales en celles-ci $dx=V\,dt\,cos\,a \ldots dy=V\,sin\,a\,dt-gt\,dt$. Intégrant de nouveau, il vient $x=Vt\,cos\,a \ldots y=Vt\,sin\,a-\frac{gt^2}{2}$; & en éliminant t, on a $y=x\,tang\,a-\frac{1}{2}g.\frac{xx}{VV\,cos^2 a}$. Donc

si la hauteur dûe à la vîtesse de projection est désignée par la constante h, on trouvera $y = x \tan a - \frac{xx}{4h \cos^2 a}$, pour exprimer le rapport des coordonnées dans la trajectoire du mobile. Et comme l'une de ces coordonnées, y, n'a qu'une dimension, on doit en conclure que la trajectoire est une parabole.

305. Il suit de-là que tout projectile lancé dans le vuide, suivant une direction oblique à l'horizon, décriroit exactement une courbe parabolique. Mais dans l'état actuel des choses, où la résistance de l'air a tant d'influence sur le mouvement des corps, la trajectoire des projectiles, celle d'une bombe par exemple, differe sensiblement d'une parabole. On verra même dans la suite combien la recherche en est compliquée.

306. Le procédé qui nous a conduits à l'équation $y = x \tan a - \frac{xx}{4h \cos^2 a}$, n'est pas le seul qui mene au même résultat. On peut démontrer de plusieurs autres manieres, que la trace du projectile dans le vuide est une parabole. On peut regarder, par exemple, la vîtesse initiale du mobile suivant AV, comme étant composée d'une vîtesse $V \sin a$ suivant la verticale AK, & d'une vîtesse $V \cos a$ suivant l'horizontale AP. Cela posé, si le corps n'avoit que la premiere vîtesse, il parviendroit, dans un temps t, à la hauteur $AQ = Vt \sin a - \frac{1}{2} g t^2$ (290) : mais pendant ce même temps, la seconde vîtesse doit le faire avancer horizontalement de la quantité $QM = Vt \cos a$. Donc il doit réellement parvenir au point M, dans le temps t, & on a comme ci-dessus,

$y = Vt \sin a - \frac{1}{2} g t^2 \ldots x = Vt \cos a.$

La formule qui sert à déterminer le temps est $t = \frac{x}{V \cos a}$ & la vîtesse du projectile est dûe à une hauteur exprimée par $h - y$: car (303) $u\,du = X\,dx + Y\,dy$; donc si $X = 0$ & $Y = -g$, on aura $u\,du = -g\,dy$, & $\frac{uu}{2g}$ ou la hauteur dûe à la vîtesse du corps $= h - y$.

Pour connoître les points où la courbe rencontre l'horizontale AP, il faut supposer $y = 0$ dans l'équation $y = x \tan a - \frac{xx}{4h \cos^2 a}$. On trouvera pour x les deux valeurs suivantes, $x = 0 \ldots x = 4h \cos^2 a \tan a = 4h \cos a \sin a = 2h \sin 2a$. La premiere convient au point A, la seconde au point C.

307. Celle-ci donne pour l'*Amplitude du jet*, la distance $AC = 2h \sin 2a$. L'amplitude du jet est donc la plus grande qu'il soit possible d'obtenir sous un degré d'inclinaison quelconque, lorsque $\sin 2a = 1$. C'est donc en inclinant le mortier, de 45° que toutes choses d'ailleurs égales on lanceroit une bombe à la plus grande distance possible. Alors l'amplitude de sa trajectoire seroit double de la hauteur dûe à la vîtesse de projection.

308. On doit remarquer ici qu'à une même abscisse AP, il ne répond qu'une seule ordonnée PM, parce que dans l'équation $y = x \tan a - \frac{xx}{4h \cos^2 a}$, l'ordonnée y n'a qu'une seule valeur : mais pour une même ordonnée AQ ou $PM = P'M'$, on a toujours deux abscisses QM, QM', ou AP, AP'. Car l'équation $xx - 2hx \sin 2a = 4hy \cos^2 a$ donne évidemment deux valeurs pour x.

Or par la nature des équations du second degré, la somme des racines $AP + AP'$ est égale au coëfficient $2h \sin 2a$ qui exprime la valeur de AC : on a donc $AP + AP' = AC$, ou $AP = CP'$; ce qui prouve que les deux portions AM, CM' de la trajectoire sont égales & semblables. Donc l'ordonnée DB qui passe par le milieu D de l'amplitude AC, divise la trajectoire en deux parties égales & semblables BMA, $BM'C$: donc BD est l'axe de la parabole, B en est le sommet, & BD représente la plus grande élévation du projectile. Pour déterminer ce *Maximum*, il n'y a qu'à supposer $x = h \sin 2a$: on trouve aussi-tôt $BD = y = h \sin^2 a$. Le parametre de la parabole décrite est donc $\frac{AD^2}{BD}$ ou $4h \cos^2 a$.

309. Dans la pratique du jet des bombes, on détermine ordinairement la force de la poudre, en tirant sous l'angle de 45°; parce que si après avoir mesuré l'amplitude du jet, on en prend la moitié, on connoît par là-même la hauteur dûe à la vîtesse de projection. Or connoissant une fois la force de la poudre, on peut faire tomber avec la même charge une bombe sur un point donné D de l'horizon, moins éloigné de la batterie que le point C, lequel est censé terminer l'amplitude AC sous l'angle de 45°.

Fig. 138.

Pour cela, il suffit de connoître l'angle de projection $DAV = a$. Soit donc $AD = b$; on aura $2h \sin 2a = b$, & par conséquent $\sin 2a = \frac{b}{2h}$. Supposons, par exemple, que l'amplitude sous l'angle de 45° ait été trouvée de 500 toises, & que la distance AD ne soit que de $388^T, 7$; on

on aura $\mathit{fin}\ 2a = 0{,}7774$. Ce finus répond dans les Tables à 51° 2′ à-peu-près. L'angle de projection doit donc être de 25° 31′.

310. Il eft vrai qu'au lieu de 51° 2′, on peut prendre le fupplément 128° 58′ dont la moitié donne 64° 29′ pour un fecond angle de projection complément du premier. Il y a donc toujours deux inclinaifons à donner au mortier pour faire tomber la bombe fur un point déterminé. On préfere la plus grande, quand il s'agit d'écrafer quelque voûte : la plus petite eft en ufage dans les cas où l'on veut que la bombe, après être tombée, puiffe fe relever, fe mouvoir encore, & caufer, en éclatant, beaucoup de dégât aux environs.

La raifon de cette préférence eft toute fimple. Car fi la bombe frappe prefque perpendiculairement, elle emploie la plus grande partie de fa force à comprimer l'endroit fur lequel elle tombe : il faut donc incliner le mortier le moins qu'il eft poffible, quand on veut écrafer des édifices. Mais fi vous voulez qu'après leur chûte les bombes fe relevent & s'avancent pour ravager ce qui fe trouvera fur leur paffage, lancez-les fous une obliquité convenable, afin que leur force fe décompofant au moment de leur chûte, la partie dirigée verticalement fe confume, pendant que celle qui leur reftera dans le fens horizontal les animera encore, & tendra à les faire éclater plus loin.

311. Si le point M que l'on veut bombarder, n'eft pas fur la ligne horizontale AP, il faudra mefurer d'abord, fuivant les méthodes de la Trigonométrie, la diftance AM Fig. 139.

que nous appellerons m, & l'angle MAP que le rayon visuel AM fait avec la ligne de niveau AP. Soit δ la valeur de cet angle ; soit ensuite mesurée la force de la poudre, en tirant avec la charge ordinaire sous l'angle de 45°, de maniere que l'amplitude soit plus grande que AP.

Cela posé, puisque $AP = m \cos \delta$, & que $PM = m \sin \delta$, on pourra substituer ces deux valeurs au lieu de x & de y dans l'équation $\frac{xx}{4h} = x \sin a \cos a - y \cos^2 a$, & on trouvera $\frac{mm \cos^2 \delta}{4h} = m \sin a \cos a \cos \delta - m \cos^2 a \sin \delta$, ou $\frac{m \cos^2 \delta}{4h} = \cos a \sin (a - \delta) = \frac{1}{2} \sin (2a - \delta) - \frac{1}{2} \sin \delta$. Donc $\sin (2a - \delta) = \sin \delta + \frac{m \cos^2 \delta}{2h}$.

312. Or pour construire cette équation, on cherchera dans les Tables un angle ϕ dont la tangente soit égale à $\frac{m \operatorname{co} \delta}{2h}$, & on aura $\sin (2a - \delta) = \sin \delta + \cos \delta \operatorname{tang} \phi = \frac{\sin (\delta + \phi)}{\cos \phi}$. Connoissant l'angle $2a - \delta$ & son supplément, on ajoutera δ à l'un & à l'autre, & on prendra la moitié de chaque somme, ce qui donnera les deux degrés d'inclinaison également propres à faire tomber la bombe sur le lieu proposé.

EXEMPLE.

L'ANGLE MAP a été trouvé de 6° 12', la distance AM a été déterminée de 564 toises, & l'amplitude du jet, ou la quantité $2h$ sous l'angle de 45° s'est trouvée de 740 toises, ensorte que pour acquérir la vîtesse de projection un corps auroit dû tomber de 370 toises de haut. On demande sous quels degrés d'obliquité du mortier, toutes choses d'ailleurs égales, la bombe tomberoit sur le point M.

Calculons d'abord l'angle φ par la formule, $tang\,\varphi = \frac{m\,cos\,\delta}{2h}$, suivant la méthode qui vient d'être expliquée : voici le détail du calcul.

$$L\,m = 2{,}7512791$$
$$L\,cos\,\delta = 9{,}9974523$$
$$Somme = 12{,}7487314$$
$$L\,.\,2h = 2{,}8692317$$
$$Reste = 9{,}8794997$$

Ce dernier Logarithme étant celui de $tang\,\varphi$, nous trouverons par les Tables que l'angle $\varphi = 37^\circ\,9'$; d'où il suit que $\delta + \varphi = 43^\circ\,21'$. Calculons maintenant l'angle $2a - \delta$ par la formule $sin\,(2a - \delta) = \frac{sin\,(\delta + \varphi)}{cos\,\varphi}$: nous aurons

$$L\,sin\,(\delta + \varphi) = 9{,}8366109$$
$$L\,cos\,\varphi = 9{,}9014895$$
$$Reste = 9{,}9351214$$

pour le logarithme de $sin\,(2a - \delta)$. Or ce logarithme répond dans les Tables à $59^\circ\,28'$; son supplément est $120^\circ\,32'$. Ainsi en ajoutant $6^\circ\,12'$, de part & d'autre, nous aurons $65^\circ\,40'$ & $126^\circ\,44'$ dont les moitiés sont $32^\circ\,50'$ & $63^\circ\,22'$. En inclinant donc le mortier sous l'un de ces deux angles, la bombe tombera au point M.

Comme il importe beaucoup dans le jet des bombes de régler leurs fusées, de maniere qu'elles ne les fassent point éclater ni trop tôt ni trop tard, on doit s'attacher à connoître le temps que les bombes emploient pour parvenir au but ; & pour le mesurer, on peut se servir de la formule $t = \frac{x}{V\,cos\,a} = \frac{m\,cos\,\delta}{cos\,a\sqrt{2gh}}$. Prenant donc pour a une des deux

valeurs déja calculées, on déterminera t, comme il suit

$$L\ cof\,a = 9{,}9244092$$
$$\tfrac{1}{2} L\,2h = 1{,}4346158$$
$$\tfrac{1}{2} L\,g = 0{,}7389747$$
$$Somme = 12{,}1019997$$

Ce dernier logarithme répond à la valeur du dénominateur $cof\,a\sqrt{2gh}$. Celui du numérateur eſt

$$L\,m\,cof\,\delta = 12{,}7487314$$
$$L\,cof\,a\sqrt{2gh} = 12{,}1019997$$
$$Reſte = 0{,}6467317$$

Donc $t = 4{,}433 = 4\frac{3}{7}$; mais il faut remarquer que m & h ayant été comptés en toiſes, & g en pieds, il faut, pour avoir la véritable valeur de t, multiplier par $\sqrt{6}$ celle que nous venons de trouver. Ajoutons donc $\frac{1}{2} l\,6$, ou 0,3890756 à 0,6467317, & nous aurons $l t = 1{,}0358073$ qui répond à 10,86. Ainſi la bombe emploiera 10″, 86 pour parvenir au point M en décrivant la plus petite parabole.

Si on ajoute au logarithme 1,0358073 celui de cof 32° 50′ qui eſt 9,9244092, la ſomme ſera 10,9602165; & ſi on retranche de cette ſomme le logarithme de cof 63° 22′, qui eſt 9,6515486, il reſtera 1,3086671 pour le logarithme du temps que la bombe emploieroit à décrire la plus grande parabole. Ce temps, dans la ſuppoſition préſente, ſeroit donc de 20″, 355 ou de 20″$\frac{11}{31}$.

REMARQUE.

* [313. M. de Maupertuis a réſolu ſi briévement & d'une maniere ſi ſatisfaiſante les problêmes relatifs au jet des

bombes, que l'on peut citer comme un modele de précision, son Mémoire intitulé *Balistique Arithmétique.* Ceux qui ne se trouvent pas à portée de consulter l'Histoire de l'Académie Royale des Sciences, pourront à-peu-près juger par ce qui suit, de la rapidité de ses solutions.

Soit $CA = h =$ la hauteur dûe à la vîtesse de projection suivant AG; soit $AQ = s =$ l'espace que la bombe parcourroit d'un mouvement uniforme, si la pesanteur ne l'abaissoit pas de la quantité $QM = z$. On aura (28 & 288) $s : 2z :: \sqrt{h} : \sqrt{z}$; donc $s^2 = 4hz$, donc 1°, le trajectoire sera une parabole. Fig. 140.

Soit $AP = x$, $PM = y$, $tang\, QAP = t$, on aura $PQ = tx$, $QM = PQ - PM = tx - y$, & $AQ^2 = AP^2 + PQ^2$; donc $s^2 = x^2 + t^2x^2 = 4hz = 4htx - 4hy$; donc $x^2(1 + t^2) = 4h(tx - y)$; équation aux coordonnées, dans laquelle on fait entrer à dessein l'angle d'inclinaison QAP, afin de pouvoir déterminer la direction du mortier.

314. S'il faut, par exemple, jetter une bombe sur le point E avec une charge de poudre donnée, on mesurera d'abord la distance $AD = b$, & la hauteur $ED = c$; puis on remarquera que x devenant b, y devient c. Substituant donc, on trouvera, toute réduction faite, que $t = \frac{2h}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{(4h^2 - hc - bb)}$. Donc 2°, la bombe doit atteindre le but sous deux inclinaisons différentes du mortier.

Mais pour que les valeurs de t soient réelles, il faut que $4h^2$ soit plus grand que $bc + bb$, ou du moins qu'il y ait égalité.

Si le point E se trouve sur l'horizontale, $t = \frac{2h}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{4h^2 - bb}$; s'il est au-dessous, $t = \frac{2h}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{(4h^2 + 4hc - bb)}$.

S'il falloit déterminer la charge convenable pour frapper le point E, sous une direction donnée, on calculeroit la force du jet, représentée par $CA = h = \frac{b^2(1+t^2)}{4(bt-c)}$. Formule qui fait voir que sous une même direction, l'amplitude du jet est proportionnelle à h; puisqu'en supposant alors $c = 0$, on a $AB = b = \frac{4t}{1+t^2}h$.

315. Le *Maximum* de l'amplitude se trouve, en différentiant à l'ordinaire l'équation $x = \frac{4t}{1+t^2}h$ ou $\frac{x}{h} = \frac{4t}{1+t^2}$; car si on égale à zéro la différentielle de $\frac{4t}{1+t^2}$, on aura $t = 1 = tang\ 45°$. Donc 3°, la plus grande amplitude que puisse avoir la parabole, sous une charge donnée, répond à l'angle de 45°.

316. 4°, On connoîtra le *Minimum* de la charge, en différentiant d'abord l'équation $h = \frac{b^2(1+t^2)}{4(bt-c)}$, ou $\frac{4h}{b^2} = \frac{1+t^2}{bt-c}$, ce qui donnera $t = \frac{c}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{(b^2+c^2)}$, & en substituant ensuite la valeur positive de t dans la formule, ce qui donne pour la moindre charge possible $h = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{(b^2+c^2)}$.]

★ 317. Reprenons maintenant les équations générales $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = X dt \ldots d\left(\frac{dy}{dt}\right) = Y dt$, & supposons que le corps soit sollicité par la seule force verticale Y; on aura toujours $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$, ou $dx = C dt$, ce qui fait voir que la vîtesse horizontale est constante.

L'autre équation donne $Y dy = \frac{dy}{dt} d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ dont l'intégrale

eſt $\frac{dy^2}{dt^2} = 2\int Ydy$, & puiſque dt eſt proportionnel à dx, on a $\frac{dy^2}{dx^2} = m\int Ydy$, ou $dx = \frac{dy}{\sqrt{(m\int Ydy)}}$, équation ſéparée, ſi Y eſt une fonction de y.

Applications.

318. Soit un corps quelconque lancé ſuivant BV, avec une vîteſſe quelconque, & attiré vers la droite AP, en raiſon inverſe du quarré de ſa diſtance à cette ligne, on demande l'équation de ſa trajectoire ? Fig. 141.

La condition énoncée donne $Y = \frac{-gff}{yy} \ldots \int Ydy = gff\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{b}\right)$. Donc l'équation différentielle de la trajectoire eſt $dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{a}{y} - \frac{a}{b}\right)}}$, ou $dx\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{ydy}{\sqrt{(by-yy)}} = \frac{ydy - \frac{1}{2}bdy}{\sqrt{(by-yy)}} + \frac{\frac{1}{2}bdy}{\sqrt{(by-yy)}}$, dont l'intégrale eſt $x\sqrt{\frac{a}{b}} = C - \sqrt{(by-yy)} + \frac{1}{2}b \,.\, Arc\,cof\left(\frac{\frac{1}{2}b - y}{\frac{1}{2}b}\right)$.

Si la droite AP attire le mobile en raiſon inverſe du cube de la diſtance, on aura $Y = \frac{-gf^3}{y^3} \ldots \int Ydy = \frac{gff}{2}\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{b^2}\right)$, d'où on tirera $dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{y^2} - \frac{a^2}{b^2}\right)}}$, ou $\frac{adx}{b} = \frac{ydy}{\sqrt{(b^2 - y^2)}}$. L'intégrale de cette équation eſt $\frac{ax}{b} = C - \sqrt{(b^2 - y^2)}$; donc la trajectoire doit être en général une ſection conique qui a pour premier axe la ligne AP.

319. Réciproquement, étant donnée la trajectoire BM, on peut déterminer quelle force Y perpendiculaire ſur AP il faudroit pour que le corps décrivît librement cette trajectoire : car en différentiant l'équation $\frac{dy^2}{dx^2} = m\int Ydy$, ou $\frac{\frac{1}{2}C^2dy^2}{dx^2} = \int Ydy$, on a $\frac{C^2dy}{dx}\, d\left(\frac{dy}{dx}\right) = Ydy$, & par conſé-

quent $Y = \frac{C^2}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{C^2 ddy}{dx^2}$, en ſuppoſant dx conſtante.

320. Si on veut ſavoir, par exemple, quelle doit être la force Y perpendiculaire ſur AP, pour que le projectile décrive une ſection conique BM dont l'axe principal ſoit AP, on prendra l'équation générale des lignes du ſecond ordre, qui eſt $yy = a + px + qxx$, & on la différentiera une premiere fois. Sa différentielle ſera $ydy = \frac{1}{2}pdx + qxdx$, laquelle étant différentiée une ſeconde fois en ſuppoſant dx conſtante, donnera $yddy + dy^2 = qdx^2$. Multipliant ce réſultat par y^2, on aura $y^3 ddy = qy^2 dx^2 - y^2 dy^2 = qdx^2(a + px + qxx) - dx^2(\frac{1}{2}p + qx)^2 = (aq - \frac{1}{4}pp)dx^2$. Donc $Y = \frac{C^2(aq - \frac{1}{4}pp)}{y^3}$. La force verticale doit donc être, dans ce cas, réciproquement proportionnelle au cube de l'ordonnée, comme nous l'avons déja trouvé par la méthode directe.

Remarquez cependant que Y s'évanouit, lorſque $aq = \frac{1}{4}pp$: mais alors $a + px + qxx$ eſt un quarré parfait; ainſi la ſection conique devient la ligne même de projection. Il ne faut pas en effet d'autre force que la force de projection, pour retenir le mobile dans une trajectoire rectiligne.

* [321. En général, ſi le corps eſt animé par les deux forces X & Y, les équations du mouvement étant $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = Xdt \ldots d\left(\frac{dy}{dt}\right) = Ydt$, on en déduira $\frac{dx^2}{dt^2} = 2\int Xdx \ldots \frac{dy^2}{dt^2} = 2\int Ydy$; & par conſéquent l'équation de la trajectoire ſera $\frac{dx}{\sqrt{\int Xdx}} = \frac{dy}{\sqrt{\int Ydy}}$. Donc ſi X & Y ſont des fonctions reſpectives de x & de y, cette équation ſera toute ſéparée, & on pourra l'intégrer, au moins par les quadratures.

Par

Par exemple, si on suppose que la force verticale Y est celle de la gravité, & que la force horizontale X est réciproquement proportionnelle au cube de la distance du corps à la verticale qui passe par l'origine des abscisses, on aura $Y = -g \ldots X = -\frac{gf^3}{x^3} \ldots \int Y dy = g(b-y) \ldots \int X dx = \frac{gf^3}{2}\left(\frac{1}{xx} - \frac{1}{aa}\right)$. On en déduira donc pour l'équation de la la trajectoire, $\frac{dy}{\sqrt{(b-y)}} = \sqrt{\frac{2a^2}{f^3}} \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Or l'intégrale de cette équation est $\sqrt{(b-y)} = C \pm \sqrt{\frac{2a^2}{f^3}(a^2-x^2)}$; elle appartient donc, en général, à une ligne du quatrieme ordre, & cette ligne devient une parabole ordinaire, lorsque $C = 0$.

322. Examinons maintenant le mouvement d'un corps qui étant lancé dans le vuide avec une force de projection quelconque, seroit attiré vers un point fixe par une force centripete dont l'action varieroit à différentes distances de ce point.

Soit AM la trajectoire du mobile, soit C le centre des forces, l'abscisse $AP = x$, l'ordonnée $PM = y$, la distance $AC = a$, le rayon vecteur $CM = z$, P la valeur absolue de la force centripete au point M, représentée par MO. On décomposera cette force en deux, l'une MT suivant AM, l'autre MS suivant AP. La premiere aura pour expression $\frac{PM}{CM} \cdot MO$, ou $\frac{Py}{z}$; l'expression de la seconde sera $\frac{CP}{CM} \cdot MO$ ou $\frac{P(a-x)}{z}$. On aura donc la force $X = \frac{P(a-x)}{z}$ & la force $Y = \frac{-Py}{z}$, ce qui donnera les deux équations $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{a-x}{z} P\,dt \ldots d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{-y}{z} P\,dt$. Fig. 142.

Ii

Cela posé, multiplions la premiere par y, & la seconde par $a - x$; nous aurons, en ajoutant les produits, $y d\left(\frac{dx}{dt}\right) + (a - x) d\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$, dont l'intégrale est $y . \frac{dx}{dt} + (a - x)\frac{dy}{dt} = C$, ou $y dx + (a - x) dy = C dt$; équation absolument indépendante de la force centrale P, & qui ne suppose autre chose, sinon que la direction de cette force est toujours vers le même point fixe. Or l'intégrale de $y dx + (a - x) dy$ est $2\int y dx + (a - x)y$; elle est donc double de l'aire du secteur ACM, & par conséquent cette aire est proportionnelle au temps, ou $= \frac{1}{2}Ct$. *Quelle que soit donc la force centrale, l'aire décrite par le rayon vecteur pendant un certain temps* t *est proportionnelle à ce temps.*

Dans la théorie des forces centrales, il y a peu de propositions aussi fécondes & aussi générales que celle-là. Newton l'a prise pour base de ses calculs, dans tout ce qu'il a démontré sur cette matiere. *Phil. Princip. Mathem. Sect. II. Prop. I.*

323. Si on appelle φ l'angle ACM, on aura $\frac{1}{2}\int zz d\varphi$ pour l'expression de l'aire AMC; ainsi $zz d\varphi = Cdt$, équation qui donne $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{zz}$. Or $\frac{d\varphi}{dt}$ est la vîtesse angulaire du mobile, ou ce qui revient au même, $\frac{d\varphi}{dt}$ exprime la vîtesse avec laquelle tourne le rayon vecteur : *la vîtesse angulaire est donc réciproquement proportionnelle au quarré de la distance.*

324. Si on mene du centre C une perpendiculaire CN sur la tangente en M, la valeur de cette perpendiculaire sera $\frac{zz d\varphi}{ds} = \frac{Cdt}{ds} = \frac{C}{u}$. Donc *la vîtesse effective du mobile dans un point quelconque de son orbite est réciproquement comme*

la perpendiculaire menée du centre ſur la tangente à ce point.

325. En multipliant la premiere des deux équations générales (322) par $\frac{dx}{dt}$, & la ſeconde par $\frac{dy}{dt}$, on aura $\frac{dx}{dt} d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt} d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{-Pydy + P(a-x)dx}{z}$. Or $zz = yy + (a-x)^2$, ce qui donne $z\,dz = y\,dy - (a-x)\,dx$. Donc $u\,du = -P\,dz$, & en intégrant, $uu = -2\int Pdz$. Mais puiſque P eſt une fonction de z, cette derniere équation donnera la vîteſſe u en z; le mobile aura donc à chaque point de ſa trajectoire la vîteſſe qu'auroit un autre corps actuellement à la même diſtance du centre vers lequel il deſcendroit en ligne droite, en ſuppoſant ſimplement qu'il eût eu une fois la même vîteſſe que le premier mobile, à égales diſtances du centre. C'eſt la XL propoſition des principes de Newton, Sect. VIII.

326. Pour conſtruire maintenant la trajectoire, reprenons les deux équations $zz\,d\varphi = C\,dt \ldots uu = 2\int P\,dz$, & ſubſtituons dans la derniere, $\frac{ds^2}{dt^2}$ ou $\frac{dz^2 + z^2 d\varphi^2}{dt^2}$ au lieu de u^2. Nous aurons $dz^2 + z^2 d\varphi^2 = -2\,dt^2 \int P\,dz$, qui en ſubſtituant $\frac{z^4 d\varphi^2}{C^2}$ à dt^2, deviendra $(dz^2 + z^2 d\varphi^2)\,C^2 = -2 z^4 d\varphi^2 \int P\,dz$. Donc $d\varphi = \frac{\pm C\,dz}{z\sqrt{(-2zz\int P\,dz - C^2)}}$, équation ſéparée, & que l'on pourra toujours conſtruire, au moins par les quadratures. C'eſt ainſi que Newton a réſolu ce problême, Prop. XLI des Principes.

A l'égard de l'ambiguité du ſigne $\pm$, elle provient de ce que l'angle de projection *CAV* peut être aigu ou obtus. S'il eſt aigu, z diminue à meſure que l'angle φ augmente, il faut donc alors ſe ſervir du ſigne $-$. S'il eſt obtus,

z & φ croissent en même temps ; on doit donc dans ce cas employer le signe $+$. On voit bien que si l'angle de projection étoit droit, les deux signes seroient indifférents.

327. Au reste, dans quelque hypothese que ce soit de la force centrale, le cercle pourra toujours être une trajectoire, pourvu cependant qu'il y ait deux conditions observées. La premiere, que la vîtesse de projection ait été imprimée dans une direction perpendiculaire au rayon vecteur : la seconde, que le quarré de cette vîtesse soit égal au produit de la force centrale par le rayon du cercle, ou ce qui est la même chose, que la force centrale soit à celle de la gravité comme la hauteur dûe à la vîtesse de projection est à la moitié du rayon.

Car si la trajectoire est un cercle, on a $dz = 0$, ce qui donne en général $-2z^2 \int P dz - C^2 = 0$; donc $\int P dz = \frac{-C^2}{2z^2}$; & en différentiant on a $P dz = \frac{C^2}{z^3} dz$, ou $P = \frac{C^2}{z^3}$. Mais comme alors $z d\varphi = ds = u dt$, l'équation $zz d\varphi = C dt$ donnera $C = uz$, & par conséquent $P = \frac{uu}{z}$, ou $u^2 = Pz$ ou $2gh = Pz$. Cela suit aussi de ce que la force centripete est, dans ce cas, égale à la force normale. Or celle-ci est à la force de gravité, comme la hauteur dûe à la vîtesse du mobile est à la moitié du rayon.

EXEMPLE I.

328. Supposons que la force centrale agisse en raison directe de la distance, & cherchons l'équation de la trajectoire.

Appellant f la distance où la force centrale se trouve égale

à la force de la gravité, nous aurons en général $P = \frac{gz}{f}$ & $\int P\,dz = \frac{gzz}{2f} + C'$. Et si nous supposons que le mobile a été lancé du point A suivant AV perpendiculaire à CA avec une vîtesse V, on aura $dz = 0$ au point A, & par conséquent $z\,d\varphi = ds$. Ainsi l'équation $z^2 d\varphi = C\,dt$ se change au point A en celle-ci, $z\,ds = C\,dt$; d'où on tire $C = \frac{z\,ds}{dt} = aV$. Fig. 143.

Or $uu = -2\int P\,dz = -2C' - \frac{gzz}{f}$; puisque $u = V$, lorsque $z = a$, on aura $2c' = -VV - \frac{ga^2}{f}$, ce qui donne $uu = VV + \frac{ga^2}{f} - \frac{gzz}{f} = -2\int P\,dz$: substituant donc ces valeurs & celle de $V^2 = 2gh$ dans l'équation générale (326), on trouvera que $d\varphi = \frac{-aV\,dz}{z\sqrt{(V^2 z^2 + \frac{g}{f}(a^2 z^2 - z^4) - a^2 V^2)}}$ $= \frac{-a\,dz\sqrt{2fh}}{z\sqrt{[(a^2 - z^2)(z^2 - 2fh)]}}$. Pour intégrer cette différentielle, soit $\sqrt{(a^2 - z^2)} = pz$, & soient substituées les valeurs de z & de dz; on aura $d\varphi = \frac{dp\sqrt{2fh}}{\sqrt{(a^2 - 2fh - 2fhp^2)}}$. Soit ensuite $p\sqrt{2fh} = q\sqrt{(a^2 - 2fh)}$; il viendra $d\varphi = \frac{dq}{\sqrt{(1-qq)}}$ dont l'intégrale est $q = \sin\varphi$, sans constante parce que q ou $\frac{\sqrt{2fh}.\sqrt{(a^2 - z^2)}}{z\sqrt{(a^2 - 2fh)}}$ s'évanouit lorsque $\varphi = 0$, ou lorsque $z = a$. Nous aurons donc $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2fh}.\sqrt{(a^2 - z^2)}}{z\sqrt{(a^2 - 2fh)}}$ ou $z^2 \sin^2\varphi\,(a^2 - 2fh)$ $= 2fh(a^2 - z^2)$; & faisant $CP = x$, $PM = y$, nous pourrons substituer yy au lieu de $z^2 \sin^2\varphi$ & $x^2 + y^2$ au lieu de z^2, ce qui donnera pour l'équation de la trajectoire $yy(a^2 - 2fh) = 2fh(a^2 - x^2 - y^2)$, ou $yy = \frac{2fh}{a^2}(a^2 - x^2)$. Or cette équation appartient à une ellipse dont C est le centre, dont le demi-grand axe $AC = a$, & dont le demi-petit axe $BC = \sqrt{2fh}$. Nous supposons $a > 2fh$; s'il

étoit plus petit, BC feroit le demi-grand axe.

329. Donc fi un corps, après avoir été lancé perpendiculairement au rayon vecteur AC avec une vîteffe dûe à la hauteur h, eft follicité vers le centre C par une force centripete en raifon directe de la diftance à ce point, de maniere qu'à la diftance f, l'action de cette force foit égale à celle de la gravité, il décrira une ellipfe dont le centre fera celui des forces, dont l'un des demi-axes fera $AC = a$, & dont l'autre demi-axe $BC = \sqrt{2fh}$.

Si la projection n'a pas été faite perpendiculairement au rayon vecteur, mais fuivant une ligne MV' qui faffe avec le rayon vecteur CM un angle donné CMV', on pourra déterminer également les axes de la trajectoire & leur pofition. Car foit k la hauteur dûe à la vîteffe du corps en M, ou à la vîteffe de projection; on a en général, $uu = VV + \frac{g}{f}(aa - zz)$; donc $2fk = 2fh + aa - mm$: & puifque $2fh$ eft égal au quarré de BC, il eft clair que $2fk$ eft égal au quarré du demi-diametre CO conjugué au demi-diametre CM. On connoît donc $CM = m$, $CO = \sqrt{2fk}$, & l'angle CMV' que ces deux demi-diametres font entr'eux; il n'eft donc pas difficile de décrire l'ellipfe qui fert de trajectoire au mobile dans le cas où l'angle de projection eft oblique.

330. Quant au temps que le mobile employe à parcourir un arc quelconque AM de fa trajectoire, il eft à l'aire $ACM :: 1 : \frac{aV}{2}$; & par conféquent fi on appelle c le nombre 3,14159, & b le demi-axe, CB le temps d'une révolution

entiere ou le *Temps périodique* aura pour expression $\frac{cab}{\frac{1}{2}aV}=\frac{2cb}{V}$. Ce temps est donc le même que celui qu'employeroit un corps à tourner uniformément avec la vîtesse V dans la circonférence dont CB est rayon.

Mais comme $b=\sqrt{2fh}$, & que $V=\sqrt{2gh}$, le temps périodique peut être exprimé aussi par $2c\sqrt{\frac{f}{g}}$, quantité qui ne dépend que de la force centrale, & qui fait voir que si plusieurs corps animés par des impulsions primitives décrivent des ellipses autour du même centre, leurs temps périodiques doivent être égaux.

331. La hauteur k dûe à la vîtesse du projectile en un point quelconque M de son orbite est exprimée (329) par $\frac{CO^2}{2f}$, & par conséquent la vîtesse elle-même est proportionnelle au demi-diametre conjugué CO : appellant donc V la vîtesse en A, & u la vîtesse en M, on aura $u=\frac{V.CO}{CB}$. Le projectile se trouvera donc avoir le plus de vîtesse, lorsqu'il sera aux extrêmités du petit axe, & il en aura le moins, lorsqu'il sera aux extrémités du grand.

332. Les points de la plus grande & de la plus petite vîtesse du projectile s'appellent en général les *Absides* de son orbite ; & quand il s'agit du mouvement des planetes autour du Soleil, on appelle en particulier, abside supérieure ou *Aphélie*, le point de leur plus petite vîtesse ; celui de leur plus grande vîtesse se nomme abside inférieure ou *Périhélie*.

EXEMPLE II.

333. Si la force centrale agit en raison inverse du quarré de la distance, & si on suppose à l'ordinaire que f soit

la distance à laquelle il y ait égalité entre cette force & celle de la gravité, on demande quelle sera la trajectoire du mobile ?

On aura alors $P = \frac{gff}{zz} \ldots \int P dz = \frac{-gff}{z} + C' \ldots$

Fig. 144. $uu = -2\int P dz = -2C' + \frac{2gff}{z}$; donc si on fait $AC = a$, & la vîtesse de projection en $A = V$, on aura $VV = -2C' + \frac{2gff}{a}$, & $-2C' = VV - \frac{2gff}{a}$; ce qui donne $uu = -2\int P dz = VV + \frac{2gff}{z} - \frac{2gff}{a}$. Appellons v la hauteur dûe à la vîtesse u, & h la hauteur dûe à la vîtesse de projection V, nous aurons $v = h + \frac{ff}{z} - \frac{ff}{a}$.

Cela posé, si la vîtesse de projection est perpendiculaire au rayon vecteur CA, la constante de l'équation $z^2 d\varphi = C dt$ sera $= aV$. Ainsi l'équation de la trajectoire sera $d\varphi = \frac{a dz}{z\sqrt{[zz + \frac{ffzz}{h}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{a}\right) - aa]}} = \frac{a dz \sqrt{ah}}{z\sqrt{[(z-a)\,(\overline{ah - ff}.z + a^2h)]}}$.
Soit $\frac{2a^2h - f^2z}{z} = p$, ou $z = \frac{2a^2h}{f^2 + p}$, on aura $\frac{dz}{z} = \frac{-dp}{f^2+p} \ldots z - a = \frac{2a^2h - af^2 - ap}{f^2+p} \ldots (ah - ff)z + a^2h = \frac{a^2h(2ah - ff + p)}{f^2 + p} \ldots \sqrt{[(z-a)\,(\overline{ah - ff}.z + a^2h)]} = \frac{a\sqrt{ah}}{f^2+p}\sqrt{[(2ah - ff)^2 - p^2]}$. Donc $d\varphi = \frac{-dp}{\sqrt{[(2ah - ff)^2 - p^2]}}$; or l'intégrale est $\frac{p}{2ah - ff} = \cos\varphi$, ou $\frac{2a^2h - f^2z}{2ahz - f^2z} = \cos\varphi$; sans constante parce que l'on a en même temps $\varphi = 0$ & $z = a$. L'équation finie de la trajectoire est donc alors $2a^2h - f^2z = (2ah - ff)z\cos\varphi$.

Mais comme AP étant x, on a $z\cos\varphi = a - x$, il est clair que l'équation entre les z & les x de la courbe doit être $f^2z = 2a^2h + (ff - 2ah)(a - x) = af^2 + (2ah - ff)x$.

Elevant

Elevant donc au quarré, ſubſtituant au lieu de z^2 ſa valeur $y^2 + (a - x)^2$, & réduiſant on aura $f^4 y^2 = 4a^2 h f^2 x + 4ahx^2(ah - f^2)$; équation qui appartient, en général, à une ſection conique dont le ſommet eſt en A, & dont l'axe eſt AP. Elle appartient à l'ellipſe ſi ah eſt plus petit que f^2; elle appartient à la parabole ſi $ah = f^2$, & au cas que ah ſoit plus grand que f^2, elle déſigne une hyperbole.

334. Dans la premiere ſuppoſition, le grand axe Aa de l'ellipſe ſe trouve en faiſant $y = 0$, ce qui donne $x = Aa = \frac{af^2}{f^2 - ah}$, le petit demi-axe $DB = \frac{a\sqrt{ah}}{\sqrt{(f^2 - ah)}}$, comme on le trouve en prenant $x = \frac{1}{2} Aa$. Or $AC = a$ & $Ca = \frac{a^2 h}{f^2 - ah}$; donc $AC . Ca = \frac{a^3 h}{f^2 - ah} = DB^2$: d'où il ſuit que *le point* C *où ſe trouve le centre des forces eſt le foyer même de l'ellipſe.*

335. Ce ſera le foyer le plus proche du point A, lorſque $2ah$ ſurpaſſera f^2; ce ſera le plus éloigné ſi $2ah$ eſt plus petit que f^2, & les deux foyers ſe réuniront en un ſeul, c'eſt-à-dire, que la trajectoire deviendra circulaire ſi $2ah = f^2$ (327). On trouve de même que la trajectoire étant une hyperbole ou une parabole, le centre des forces eſt toûjours au foyer.

Application au mouvement des Planetes.

336. Afin d'appliquer cette théorie au mouvement des corps céleſtes, ſuppoſons que la trajectoire ſoit elliptique, faiſons le grand axe $= A$, le petit axe $= B$, le parametre $= P$; nous aurons $A = \frac{af^2}{f^2 - ah} \ldots B = \frac{2a\sqrt{ah}}{\sqrt{(f^2 - ah)}} \ldots$

$P = \frac{B^2}{A} = \frac{4a^2h}{f^2}$. Or le temps d'une révolution entiere eſt égal à l'aire elliptique diviſée par $\frac{1}{2}aV$; ſa valeur eſt donc $\frac{\frac{1}{4}c \cdot A \cdot B}{\frac{1}{2}a\sqrt{2gh}}$, & en y ſubſtituant au lieu de B la quantité $\sqrt{A \cdot P}$ ou $\frac{2a}{f}\sqrt{Ah}$, elle deviendra $\frac{c \cdot A^{\frac{3}{2}}}{f\sqrt{2g}}$. D'où on conclud que *ſi pluſieurs corps décrivent des trajectoires elliptiques autour du même centre de forces, leurs temps périodiques ſeront comme les racines quarrées des cubes des grands axes de leurs orbites.*

337. Et puiſque la hauteur dûe à la vîteſſe eſt en général $v = h + \frac{ff}{z} - \frac{ff}{a}$, il ſuit que le périhélie eſt à l'extrémité du grand axe la plus proche du foyer, & que l'aphélie eſt à l'autre extrémité du même axe.

On ſçait que dans le ſyſtême de Newton toutes les planetes gravitent vers le Soleil en raiſon inverſe du quarré de leur diſtance à ſon centre. Donc ſi elles ont reçu au commencement de leur mouvement une certaine vîteſſe de projection oblique, comme cela eſt néceſſaire pour les empêcher de tomber ſur le ſoleil, cette force combinée avec celle de la gravitation qui eſt alors la force centrale, doit leur faire décrire une ſection conique qui ait le centre même du ſoleil à l'un de ſes foyers. Mais puiſque d'un côté elles ont toutes des retours périodiques, & que de l'autre elles varient toutes dans leurs diſtances au ſoleil, il eſt évident que leurs orbites ſont elliptiques. En général cependant, elles ont peu d'excentricité c'eſt-à-dire qu'elles approchent beaucoup de la figure circulaire.

338. Concluons donc qu'une planete quelconque décrit autour du ſoleil des aires proportionnelles aux temps,

& que les temps périodiques de ces aſtres ſont comme les racines quarrées des cubes des grands axes de leurs orbites. Les cometes ſont dans le même cas, avec cette différence que leurs orbites ſont des ellipſes fort allongées, dont la partie inférieure ou le périhélie peut être priſe pour un arc de parabole.

Ces deux loix mémorables du mouvement des planetes avoient déja été découvertes par le célebre Aſtronome Képler dont elles portent le nom : mais il étoit réſervé à Newton de les démontrer en toute rigueur, par un enchaînement ſingulier de principes, de calculs & de conſéquences. Après avoir poſé pour fondements de ſon ſyſtême la cauſe phyſique de ces loix, il fit voir qu'elles devoient néceſſairement avoir lieu, en ſuppoſant que la force centripete qui retient les planetes dans leurs orbites eſt dirigée vers le centre du ſoleil, & qu'elle agit en raiſon inverſe du quarré des diſtances à ce centre.

On a eu beau ſoumettre ces loix aux épreuves les plus délicates, elles ont toujours ſatisfait aux obſervations, & rien n'a contribué d'une maniere plus efficace à faire adopter le ſyſtême auquel elles ont ſervi de baſe.

Toutes les planetes ſe meuvent ſuivant l'ordre des ſignes, & quoique leurs orbites ne ſoient pas dans le même plan, leur inclinaiſon à l'écliptique ne paſſe pas huit degrés. Les deux points où elles coupent l'écliptique, s'appellent les *Nœuds*.

339. A force d'obſerver exactement toutes les cir-

constances de la révolution des astres, on a trouvé que les temps périodiques de Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne étoient . . . .

$87^{j}\ 23^{h}\ 15'\frac{1}{2}$...$224^{j}\ 16^{h}\ 48\frac{1}{2}$...$365^{j}\ 6^{h}\ 9'\frac{1}{8}$...$686^{j}\ 23^{h}\ 30'\frac{1}{2}$...$4332^{j}\ 12^{h}$...$10759^{j}\ 8^{h}$

ou en réduisant les heures & les minutes en parties décimales de jour,

87,969...224,700...365,256...686,98...4332,5...10759,33.

Or les grands axes des orbites des planetes étant comme les racines cubes des quarrés des temps périodiques, on en conclud que si le grand axe de l'orbite terrestre est supposé divisé en 100000 parties, ceux des six planetes précédentes sont représentés par les nombres suivants. . . .

38710...72333...100000...152369...520109...953803.

lesquels sont très-conformes à ceux que les observations immédiates donnent. Et comme on sait d'ailleurs que le grand axe de l'orbite terrestre est à-peu-près de 48000 demi-diametres de la terre, on n'a qu'à multiplier ces nombres par $\frac{48}{100}$, pour les réduire tous en demi-diametres terrestres. La multiplication donnera. . . .

15581...34720...48000...73137...249652...457825.

Et puisque le rayon de la terre est de 19615800 pieds, on peut évaluer ces grands axes en mesures connues.

340. On peut donc déterminer la force attractive du soleil, ou la distance f de son centre à laquelle cette force est égale à celle de la gravité. Car le temps périodique $T = \frac{c \cdot A\sqrt{A}}{f\sqrt{2g}}$; donc $f = \frac{c \cdot A\sqrt{A}}{T\sqrt{2g}}$, où il faut observer que le temps est compté en secondes, & que A ainsi que f sont

comptés en pieds. Si on veut donc évaluer les deux dernieres quantités en demi-diametres terrestres, il faut écrire $f = \frac{c \cdot A^{\frac{1}{2}} \sqrt{19615800}}{T \sqrt{2g}}$. Or le diametre A de l'orbite annuelle est de 48000 rayons de la terre, & le temps périodique T est de $365^{j}\, 6^{h}\, 9'\, 10'' = 31558150''$; donc...

$$f = \frac{(3{,}14159265)\,(48000)^{\frac{1}{2}}\,(19615800)^{\frac{1}{2}}}{(31558150)\,(60{,}392)^{\frac{1}{2}}} = 596\tfrac{1}{2}.$$

Donc la force attractive du soleil, prise à $596\frac{1}{2}$ demi-diametres terrestres de son centre, est égale à celle que la gravité exerce sur les corps placés auprès de la surface de la terre.

341. Pour connoître le mouvement vrai d'une planete, il faut mesurer par voie d'observation, l'excentricité de son orbite ou la distance CS entre le centre & le foyer. Appellons E cette excentricité, A le grand axe AB, $\sqrt{AA - 4EE}$ le petit axe $2CD$, & f la quantité qui mesure l'intensité de la force accélératrice. Cela posé, voici comment on peut calculer la vîtesse de la planete, en un point quelconque M de son orbite. Fig. 145.

Puisque nous avons déja trouvé que $v = h + \frac{ff}{z} - \frac{ff}{a}$, il faut donc préalablement déterminer h. Or $A = \frac{af^2}{f^2 - ah}$; donc $h = \frac{f^2(A - a)}{A \cdot a}$; & par conséquent $v = \frac{ff}{z} - \frac{ff}{A}$: d'où il suit que la vîtesse périhélie en A est dûe à la hauteur $\frac{ff}{a} - \frac{ff}{A}$, ou $\frac{ff}{\frac{1}{2}A - E} - \frac{ff}{A}$, ou $\frac{ff(A + 2E)}{A(A - 2E)}$, & que la vîtesse aphélie en B est dûe à la hauteur $\frac{ff}{\frac{1}{2}A + E} - \frac{ff}{A}$ ou $\frac{ff(A - 2E)}{A(A + 2E)}$.

342. Remarquez que ces hauteurs sont entr'elles comme $(A + 2E)^2 : (A - 2E)^2 :: SB^2 : SA^2$, & que

par conſéquent les vîteſſes mêmes ſont : : *S B* : *SA* ; ainſi que cela doit être, puiſque les vîteſſes aux différents points de la trajectoire ſont en raiſon inverſe des perpendiculaires abaiſſées ſur les tangentes.

343. Si on veut meſurer le temps qu'une planete revenant du périhélie *A* employeroit à parcourir un arc quelconque *A M*, on fera cette proportion : comme l'aire de l'ellipſe eſt au temps périodique, ainſi l'aire *A S M* eſt au temps néceſſaire pour parcourir l'arc *A M*.

344. Si on veut réſoudre le problême inverſe, & chercher le *lieu* de la planete ſur ſon orbite dans un inſtant donné quelconque, il faudra calculer l'angle au ſoleil *A S M*, après avoir meſuré le temps *t* employé à parvenir du périhélie au point *M*. L'angle *A S M* s'appelle l'*Anomalie vraie*, & le problême qui en a la meſure pour objet eſt fort connu parmi les Aſtronomes, ſous le nom de *Problême de Képler*. On n'a pu juſqu'à préſent le réſoudre que d'une maniere approchée.

Le cercle *A N B* décrit ſur le diametre *A B* s'appelle le *Cercle de l'Excentrique*. Or ſi on prolonge juſqu'au point *N* de ſa circonférence l'ordonnée *M P*, il eſt clair que le ſecteur circulaire *A N S* étant dans un rapport conſtant avec le ſecteur elliptique *A M S*, l'aire de ce dernier eſt à l'aire du cercle, comme le temps *t* employé à parcourir l'arc *AM* eſt au temps périodique *T*.

La queſtion ſe réduit donc à mener par le point donné *S* une ligne *S N* qui coupe ſur le cercle une portion détermi-

née $\frac{t}{T}$ de sa surface. Pour cela, soit le rayon de l'excentrique $AC = 1$, l'excentricité $CS = E$, l'arc de cercle AN que l'on veut déterminer & que l'on appelle l'*Anomalie de l'Excentrique* $= \varphi$. On aura pour la valeur de l'aire cherchée ANS, la quantité $\frac{1}{2} AC \,.\, AN - \frac{1}{2} CS \,.\, PN = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2} E \sin\varphi$, & pour l'aire entiere du cercle, $c \,.\, AC^2$; donc $\varphi - E \sin\varphi = \frac{t}{T} \,.\, 2c$.

345. Si un corps quelconque se mouvoit uniformément sur la circonférence de l'excentrique, & s'il y achevoit sa révolution dans le même temps que la planete acheve la sienne dans l'ellipse, on auroit $\frac{t}{T} \,.\, 2c$ pour l'expression de l'arc AQ qu'il décriroit en un temps t. On nomme cet arc l'*Anomalie moyenne* de la planete, & il est censé toujours connu.

Si on le désigne par ϵ, on aura $\varphi - E \sin\varphi = \epsilon$; or de cette équation il n'est pas possible de déduire autrement que par approximation, la valeur de φ. Mais, en général, il sera d'autant plus aisé d'obtenir cette valeur, que l'excentricité E sera moindre. Pour faciliter encore davantage le calcul, nous supposerons que les quantités φ & ϵ sont exprimées en degrés & en parties décimales de degré; ce qui exige que l'on réduise aussi en degrés la longueur absolue de $E \sin\varphi$, en la multipliant par $\frac{180}{c}$. L'équation à résoudre sera donc $\varphi - \epsilon = \frac{180 \,.\, E}{c} \sin\varphi$.

EXEMPLE.

346. L'orbite de Mars étant la plus excentrique de toutes, si on en excepte celle de Mercure, on demande

le lieu de cette planete, $65^j\ 10^h\ 59'\ 31''\frac{1}{7}$ après son passage par le périhélie ?

Mars fait sa révolution en $686^j\ 23^h\ 30'\frac{1}{2}$; donc T réduit en décimales de jour vaut $686,98^j$; & $t = 65,458$: ainsi le calcul de la formule $\zeta = \frac{360\, t}{T}$ donnera d'abord par logarithmes.

$$L\ 360 = 2,5563025$$
$$L\ 65,458 = 1,8159627$$
$$\textit{Somme} = 4,3722652$$
$$L\ 686,98 = 2,8369441$$
$$\textit{Reste} = 1,5353211$$

Ce reste étant le logarithme de ζ, on trouve dans les Tables qu'il répond à $34°,30213$; c'est la valeur cherchée pour l'anomalie moyenne.

On sait d'ailleurs par les observations que le grand axe de l'orbite de Mars est à son excentricité : : 2004343 : 93134; donc $E = \frac{186268}{2004343}$; & par conséquent il est aisé de calculer le logarithme du coëfficient $\frac{180\,.\,E}{c}$ dans l'équation $\varphi - \zeta = \frac{180\,.\,E}{c}\ \textit{sin}\ \varphi$.

$$L\ 180 = 2,2552725$$
$$L\ 186268 = 5,2701383$$
$$\textit{Somme} = 7,5254108$$
$$L\ c\,.\,2004343 = 6,7991219$$
$$\textit{Reste} = 0,7262889$$

On a donc $L\,(\varphi - \zeta) = 0,7262889 + L\,\textit{sin}\ \varphi$. Mais comme

comme φ ne doit pas être beaucoup plus grand que ϵ ou 34°, je le ſuppoſe d'abord de 36°, & trouvant par le calcul que cette premiere valeur n'eſt pas aſſez grande, je ſuppoſe $\varphi = 38^\circ$. Le calcul donne pour ces deux ſuppoſitions,

I		II.	
$\varphi =$	36°	$\varphi =$	38°
$\epsilon =$	$34^\circ, 3$ &c.	$\epsilon =$	$34^\circ, 3$ &c.
$\varphi - \epsilon =$	1 , 7	$\varphi - \epsilon =$	3 , 7
L ſin $\varphi =$	9,7692187	*L ſin* $\varphi =$	9,7893420
Ajoutez...	0,7262889	*Ajoutez*.....	0,7262889
$L(\varphi - \epsilon) =$	0,4955076	$L(\varphi - \epsilon) =$	0,5156309
Ce logarithme répond à 3,13		Ce logarithme répond à 3,28	
L'erreur eſt donc + 1,43		L'erreur eſt donc — 0,42	

347. Cela poſé, imaginant une ligne droite MBM' dont les abſciſſes AP, AP' repréſentent les ſuppoſitions 36 & 38, & dont les ordonnées PM, $P'M'$ repréſentent les erreurs correſpondantes, on aura cette proportion : La ſomme MC des deux erreurs eſt à la différence PP' des deux ſuppoſitions, comme MP ou 1,43 eſt à un quatrieme terme $PB = 1,546$, lequel étant ajouté à la premiere ſuppoſition donne pour φ une valeur approchée 37,546. Mais afin d'obtenir une approximation qui ſoit encore plus grande, faiſons deux autres ſuppoſitions. Dans la premiere nous prendrons 37,54 pour la valeur de φ; dans la ſeconde, φ ſera $= 37,55$. Un calcul ſemblable au précédent donnera, FIG. 146.

III.	IV.
$\varphi = 37,54$	$\varphi = 37,55$
$\mathsf{C} = 34,30213$	$\mathsf{C} = 34,30213$
$\varphi - \mathsf{C} = 3,23787$	$\varphi - \mathsf{C} = 3,24787$
$L\,\mathit{fin}\,\varphi = 9,7848420$	$L\,\mathit{fin}\,\varphi = 9,7849406$
Ajoutez.... 0,7262889	*Ajoutez*.... 0,7262889
$L(\varphi - \mathsf{C}) = 0,5111309$	$L(\varphi - \mathsf{C}) = 0,5112295$
Ce logarithme répond à 3,24437	Ce logarithme répond à 3,24511
L'erreur eſt donc + 650	L'erreur eſt donc — 276

De ce double réſultat nous déduirons la proportion ſuivante ; la ſomme des erreurs, 926, eſt à $\frac{1}{100}$, différence des ſuppoſitions, comme la premiere erreur, 650, eſt à un quatrieme terme = 0,00702. Donc enfin l'angle φ = 37°, 54702.

Cette valeur eſt exacte juſques dans la derniere décimale, puiſqu'en ſubſtituant 37°, 54702 au lieu de φ dans l'équation $l(\varphi = \mathsf{C}) = 0,7262889 + l\,\mathit{fin}\,\varphi$, on ne trouve pas la moindre erreur. Concluons donc que l'anomalie *AN* de l'excentrique eſt de 37°, 54702 ou de 37° 32′ 49″$\frac{3}{11}$.

Fig. 145. 348. Il s'agit maintenant de trouver l'anomalie vraie *ASM*, étant donnée l'anomalie de l'excentrique *AN*. Poſons $CA = a$, $CP = x$, $CS = c$, & rappellons-nous la formule $\mathit{tang}\,\frac{1}{2}\varphi = \frac{1 - \mathit{coſ}\,\varphi}{\mathit{ſin}\,\varphi}$. Nous aurons en ſubſtituant, $\mathit{tang}\,\frac{1}{2}\,ASM = \frac{SM - PS}{PM}$, & $\mathit{tang}\,\frac{1}{2}\,ACN = \frac{CN - CP}{PN} = \frac{AP}{PN}$. Or par les propriétés de l'ellipſe, le rayon vecteur

$SM = a - \frac{cx}{a}$, & par conſéquent $SM - SP = a + c - x - \frac{cx}{a} = \frac{a+c}{a}(a - x) = \frac{a+c}{a} AP$; nous aurons donc $tang \frac{1}{2} ASM : tang \frac{1}{2} ACN :: \frac{a+c}{a} \cdot \frac{AP}{PM} : \frac{AP}{PN} :: a + c : \frac{a \cdot PM}{PN} :: a + c : CD :: a + c : \sqrt{(aa - cc)} :: \sqrt{(a+c)} : \sqrt{(a - c)}$; c'eſt-à-dire, que *la racine quarrée de la diſtance périhélie eſt à la racine quarrée de la diſtance aphélie, comme la tangente de la moitié de l'anomalie de l'excentrique eſt à la tangente de la moitié de l'anomalie vraie.*

Sans ſortir de notre exemple, pour le calcul de l'anomalie de Mars, nous aurons par conſéquent $\sqrt{1818075} : \sqrt{2190611} :: tang\ 18^\circ\ 46'\ 24''\frac{7}{11} : tang \frac{1}{2} ASM$. Ce qui étant mis en calcul par logarithmes donnera.

$$L\ tang\ 18^\circ\ 46'\ 24''\frac{7}{11} = 9{,}5313664$$
$$\frac{1}{2} l\ 2190611 = 3{,}1702826$$
$$Somme\ .. = 12{,}7016490$$
$$\frac{1}{2} l\ 1818075 = 3{,}1298059$$
$$Reſte\ .. = 9{,}5718431$$

Ce logarithme répond dans les Tables à $20^\circ\ 27'\ 40''\frac{8}{14}$; ainſi l'anomalie vraie $ASM = 40^\circ\ 55'\ 21''\frac{5}{11} = 40{,}92232$; ce qui fait connoître exactement le lieu de Mars dans ſon orbite pour l'inſtant donné.

Rapprochant donc les diverſes parties de cette ſolution, on aura l'anomalie moyenne $AQ = 34^\circ{,}30213 = 34^\circ\ 18'\ 7''\frac{2}{3}$; l'anomalie de l'excentrique $AN = 37^\circ\ 54702 = 37^\circ\ 32'\ 49''\frac{3}{11}$; l'anomalie vraie $ASM = 40^\circ{,}92232 = 40^\circ\ 55'\ 21''\frac{5}{11}$.

Telle eſt, en général, la maniere de calculer les mouvements des corps céleſtes : mais ces mouvements, quoique très-réguliers par eux-mêmes, ſont ſujets à certaines petites inégalités, dont nous allons indiquer briévement les cauſes & les effets.

De l'attraction des Corps céleſtes & du Problême des trois corps.

349. Le ſoleil, ſuivant Newton, eſt doué d'une force attractive qui fait mouvoir autour de lui les ſix planetes principales ; & ces planetes elles-mêmes, ainſi que les autres aſtres en général, ont une force ſemblable par laquelle ils agiſſent non-ſeulement les uns ſur les autres, mais tous enſemble ſur le ſoleil.

Il paroît que cette propriété eſt inhérente, comme l'inertie, à chaque particule de matiere, & que ne pouvant pas être l'effet de l'impulſion d'aucun fluide, il ne faut point chercher ſa cauſe ailleurs que dans la volonté même de l'Auteur de la Nature.

Conſidérant donc la gravitation réciproque de tous les corps comme une loi primitive du ſyſtême ſolaire, nous parlerons d'abord de quelques faits que l'obſervation a indiqués, ou que la théorie a devinés, pour ainſi dire. Puis nous en ferons l'application au mouvement des planetes.

350. Si l'attraction eſt propre à chaque partie de matiere, il eſt évident qu'à égales diſtances de leurs centres ; les planetes doivent attirer en raiſon de leurs maſſes. Mais

si les distances sont différentes, le calcul prouve (& l'observation le confirme) que l'attraction est en raison directe des masses & en raison inverse des quarrés des distances, sans quoi la trajectoire ne seroit pas une section conique.

Et comme on sait d'ailleurs que ces astres décrivent des orbites elliptiques autour du soleil, on en conclud que si l'action mutuelle des planetes ne troubloit pas un peu leur mouvement, les absides, les plans & les nœuds de ces orbites seroient invariables. Les Astronomes seuls pouvoient vérifier le fait; aussi s'en occuperent-ils avec tant de soin & de succès, qu'il ne reste plus aucun doute sur l'altération produite dans les trajectoires planétaires.

Newton avoit prédit à Flamstead que Jupiter étant celle de toutes les planetes qui avoit le plus de masse, & par conséquent le plus de force attractive, il devoit troubler sensiblement vers sa conjonction le mouvement des autres corps célestes, celui de Saturne & de ses Satellites principalement. On les observa donc à cette époque avec plus de soin que jamais, & la prédiction de Newton s'accomplit avec éclat; puisque Jupiter altéra d'une douzaine de jours le temps périodique de Saturne.

351. C'est la force attractive de la terre, cette même force que nous appellons près de sa surface la force de gravité, qui retient la lune dans son orbite. Sa révolution se fait en $27^j\,7^h\,43'$; sa distance moyenne est de 60 demi-diametres terrestres, & son orbite étant supposée circulaire, il est aisé de prouver que le sinus verse de l'arc qu'elle par-

court en une minute, eſt de 15 pieds $\frac{1}{12}$. Elle ſe rapprocheroit donc de cette quantité vers la terre, ſi la gravité agiſſoit ſeule pendant une minute. Donc puiſque les eſpaces parcourus en vertu des forces accélératrices ſont comme les quarrés des temps, il faut que la force centrale qui agit ſur la lune puiſſe lui faire parcourir dans la premiere ſeconde de ſa chûte vers la terre, la 3600eme partie de 15 pieds $\frac{1}{12}$.

Et comme cette force doit toujours agir en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, il eſt clair qu'à une diſtance ſoixante fois moindre, c'eſt-à-dire, près de la ſurface de la terre, elle feroit parcourir à la lune 15 pieds $\frac{1}{12}$, dans la premiere ſeconde. Or tel eſt réellement l'eſpace que la peſanteur fait parcourir aux corps graves ſur la ſurface de la terre. La force centrale de la lune n'eſt donc autre choſe que la peſanteur telle que nous l'éprouvons ſur la terre, mais ſeulement modifiée en raiſon inverſe du quarré de la diſtance au centre.

352. Le même principe retient dans leurs orbites tous les *Satellites*. C'eſt également la force attractive de Saturne qui fait tourner cinq lunes autour de lui; c'eſt la force attractive de Jupiter qui en fait tourner quatre. Toutes ces planetes *ſecondaires* décrivent des ellipſes autour de leur planete principale; leurs mouvements ſont très-réguliers, & leurs temps périodiques ſont exactement proportionnels aux racines quarrées des cubes de leurs diſtances au centre de la planete principale. Elles paroiſſent, en un mot, ſoumiſes par rapport au centre de leurs forces, à toutes les

loix que les planetes principales ſuivent dans leurs révolutions autour du ſoleil.

Mais ſi le mouvement des ſatellites de Saturne, de Jupiter & de la Terre prouve ſenſiblement que ces trois planetes ſont douées d'une force attractive, ne ſemble-t-il pas que l'analogie porte à reconnoître cette même force dans Mercure, Vénus & Mars ? Et n'eſt-il pas naturel de penſer qu'elle y agit auſſi en raiſon directe des maſſes & en raiſon inverſe des quarrés des diſtances ? La lune elle-même & les autres ſatellites ne paroiſſent-ils pas être des corps ſemblables à la terre ? Pourquoi donc refuſeroit-on d'admettre en eux cette force commune à tous les autres, & peut-être inſéparable de la matiere, par une loi primitive du Créateur ?

353. Rien du moins ne paroît plus vraiſemblable aux Phyſiciens, que l'action de la lune ſur la terre. Le flux & le reflux de la mer en offrent une preuve palpable, s'il eſt vrai, comme on le croit, que l'inégale gravitation des eaux vers la lune, produit ce phénomene ; car le ſoleil n'y coopere que foiblement. Sa force cependant eſt bien plus grande, mais comme il eſt environ 400 fois plus éloigné de nous, & que la terre eſt très-petite par rapport à lui, ſon action ſur les diverſes parties du globe terreſtre, ſe trouve ſenſiblement la même. D'ailleurs elle s'exerce ſuivant des directions preſque paralleles, ce qui rend moins ſenſibles ſes effets ſur les eaux.

La lune au contraire étant près de la terre, en compa-

raiſon du ſoleil, elle agit par des lignes beaucoup plus divergentes ; & comme ſon action ſur les différents points du globe eſt différente, il doit réſulter de ces deux cauſes réunies, un trouble général parmi les corps qui en ſont ſuſceptibles. Les eaux de l'Océan immédiatement ſoumiſes à ſon attraction doivent donc s'élever, pendant que les eaux collatérales s'abaiſſent. Mais comme la révolution diurne de la terre change continuellement les aſpects, on voit bien que les eaux déja élevées ne peuvent ſe ſoutenir long-temps au-deſſus de leur niveau ordinaire ; elles doivent donc retomber au deſſous, ſe relever encore, & pouſſer de proche en proche le flux juſques ſur les côtes.

Nous allons voir au reſte juſqu'à quel point cette gravitation réciproque des corps céleſtes, rend leurs mouvements plus compliqués, & plus irréguliers en apparence ; mais d'abord nous remarquerons que ſi les Géometres de ce ſiecle ont fait de cette recherche le principal objet de leurs travaux, c'eſt qu'ils en ont reconnu l'utilité pour perfectionner la théorie de la lune, que la détermination des longitudes en mer rend très-importante. Nous obſerverons enſuite qu'une pareille matiere ne pouvant être qu'ébauchée dans un ouvrage tel que celui-ci, notre deſſein eſt de mettre ſimplement ſur la voie les lecteurs intéreſſés à la connoître.

PROBLÊME I.

* Fig. 147. [354. Deux corps M & M' ayant été lancés dans le vuide avec des vîteſſes quelconques, & s'attirant mutuellement

ment en raiſon de leurs maſſes, il s'agit de déterminer leur mouvement.

Soient rapportées au même axe AP les deux trajectoires de ces mobiles; ſoit $AP = x$, $PM = y$, $AP' = x'$, $P'M' = y'$, $MM' = z$; l'action du corps M' ſur le corps M ſoit repréſentée par $MN = P$, on aura $M'N' = \frac{M}{M'} P$ pour repréſenter celle du corps M ſur le corps M', puiſqu'ils agiſſent en raiſon directe de leurs maſſes. Décompoſons maintenant les forces MN, $M'N'$, chacune en deux autres dont l'une ſoit parallele à AP, & l'autre perpendiculaire à cette même ligne. Les forces paralleles ſeront $MQ = \frac{P(x'-x)}{z} \ldots$ $M'Q' = \frac{M}{M'} \cdot \frac{P(x'-x)}{z}$. Les forces perpendiculaires ſeront $MO = \frac{P(y'-y)}{z} \ldots M'O' = \frac{M}{M'} \cdot \frac{P(y'-y)}{z}$; ainſi nous aurons les quatre équations ſuivantes,

$$\frac{P}{z}(x'-x)dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right) \ldots \frac{M}{M'} \cdot \frac{P}{z}(x'-x)dt = -d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$$
$$\frac{P}{z}(y'-y)dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right) \ldots \frac{M}{M'} \cdot \frac{P}{z}(y'-y)dt = -d\left(\frac{dy'}{dt}\right).$$

Et ſi après avoir multiplié la premiere par M, la ſeconde par M', on retranche les produits, on trouvera $Md\left(\frac{dx}{dt}\right) + M'd\left(\frac{dx'}{dt}\right) = 0$, dont l'intégrale eſt $M \cdot \frac{dx}{dt} + M' \cdot \frac{dx'}{dt} = C$. En traitant de même la troiſieme & la quatrieme équation, on aura $M \cdot \frac{dy}{dt} + M' \cdot \frac{dy'}{dt} = C'$. Or $M \cdot \frac{dx}{dt} + M' \cdot \frac{dx'}{dt}$ donne la quantité de mouvement du centre de gravité parallélement à AP, & $M \cdot \frac{dy}{dt} + M' \cdot \frac{dy'}{dt}$ exprime la quantité de mouvement du même centre perpendiculairement à AP; donc puiſque ces deux quantités ſont

constantes, il est clair que le centre de gravité G, ou pour parler plus exactement, le centre de masses des corps M, M' se meut uniformément suivant une ligne droite HG. La position de cette ligne & la vîtesse du centre de gravité peuvent donc se déterminer par les vîtesses de projection que les corps M & M' ont reçues, & par la position de ces mêmes corps au commencement du mouvement.

Fig. 148. 355. Cela posé, puisque la route du centre de gravité est une ligne droite, nous pouvons la prendre pour la ligne des abscisses, & alors y' ou $P'M'$ devenant négative, le mouvement du corps M sera exprimé par ces deux équations,

$$\frac{P}{z}(x'-x)dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right) \ldots \frac{P}{z}(y'+y)dt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Pour déterminer son mouvement par rapport au point mobile G, on supposera d'abord $MG = Z$, $PG = X$; puis on en déduira la valeur de $AG = x + X$, & l'équation $d\left(\frac{dAG}{dt}\right) = d\left(\frac{dx}{dt}\right) + d\left(\frac{dX}{dt}\right) = 0$, parce que la vîtesse $\frac{dAG}{dt}$ du centre de gravité est constante; donc $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -d\left(\frac{dX}{dt}\right)$. Substituant ces valeurs, on aura pour exprimer le mouvement du corps M par rapport au point mobile G les deux équations suivantes,

$$\frac{PXdt}{Z} = -d\left(\frac{dX}{dt}\right) \ldots \frac{Pydt}{Z} = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

qui sont absolument les mêmes que si le corps M étoit attiré vers le point G considéré comme fixe, par une force centrale P, fonction de MM' & par conséquent de la dis-

tance Z, puifque $MM' = \frac{M+M'}{M'}Z$. Cela eft d'ailleurs évident, par-là même que le corps M' agit fur le corps M, fuivant la direction MM' qui paffe toujours par le point G.

356. Il fuit de-là que le mouvement de deux corps qui s'attirent mutuellement avec de certaines forces, n'eft pas différent de celui qu'ils auroient, s'ils étoient attirés vers leur centre commun de gravité avec les mêmes forces, pendant que ce centre feroit mû uniformément fuivant une ligne droite. Il fuit auffi que ces forces tendantes au centre de gravité doivent toujours être une certaine fonction des diftances à ce centre, puifqu'elles font une fonction de MM' qui a un rapport conftant avec MG.

On peut fe former une idée affez jufte de ce mouvement, en concevant deux points quelconques fur deux rayons d'une roue mobile ; chaque point décrira un cercle autour du centre de la roue, pendant que ce centre fera mû fuivant une ligne droite.

357. En général, les deux corps M & M' décrivent autour du centre G des courbes femblables, puifque GM' eft toujours à GM dans le rapport conftant de M à M'. Toutes les dimenfions homologues de ces courbes font donc dans le même rapport. Or la loi fuivant laquelle ces deux corps s'attirent étant donnée, on connoîtra la force tendante au centre G, & par conféquent les trajectoires MQN, $M'Q'N'$ que ces corps décriroient autour du point G, s'il étoit fixe. Donc au bout d'un temps quelconque t, on aura le lieu de chacun fur fa trajectoire. Fig. 149.

Soient, par exemple, M & M' les lieux des deux mobiles : si le centre de gravité est avancé pendant le même temps de la quantité Gg, on menera les lignes Mm, $M'm'$ paralleles & égales à Gg, & on aura les points m & m' pour les lieux absolus des deux mobiles. Supposant donc qu'ils décrivent des cercles autour du centre de gravité, leur mouvement absolu se fera dans une cycloïde alongée ou accourcie, selon que la vîtesse de translation du centre de gravité sera plus grande ou plus petite que celle de chaque corps dans son orbite.

Fig. 147. 358. Si outre leur attraction mutuelle, les deux corps M & M' étoient sollicités par des forces quelconques, on réduiroit ces forces à deux X & Y suivant MQ & MO pour le corps M, & à deux autres X' & Y' suivant $Q'M'$ & $O'M'$ pour le corps M'. Alors les équations du mouvement deviendroient

$$Xdt + \frac{P}{z}(x'-x)dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right) \ldots X'dt - \frac{M}{M'} \cdot \frac{P}{z}(x'-x)dt = d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$$

$$Ydt + \frac{P}{z}(y'-y)dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right) \ldots Y'dt - \frac{M}{M'} \cdot \frac{P}{z}(y'-y)dt = d\left(\frac{dy'}{dt}\right).$$

Multipliant donc, comme ci-dessus, la premiere par M, la seconde par M', & ajoutant les produits, on auroit pour résultat

$$(MX + M'X')dt = Md\left(\frac{dx}{dt}\right) + M'd\left(\frac{dx'}{dt}\right);$$

traitant de même la troisieme & la quatrieme, on auroit

$$(MY + M'Y')dt = Md\left(\frac{dy}{dt}\right) + M'd\left(\frac{dy'}{dt}\right).$$

Donc la force accélératrice du centre de gravité dans la

direction de AP' feroit $\frac{MX + M'X'}{M + M'}$, & la force qui accéléroit fon mouvement perpendiculaire à AP, ou qui tendroit à l'éloigner de cette droite, feroit exprimée par $\frac{MY + M'Y'}{M + M'}$. Le centre de gravité fe meut donc de la même maniere que fi les quantités de mouvement que reçoivent les deux corps en vertu des puiffances accélératrices, lui étoient immédiatement appliquées (155).

Mais comme on ne connoît pas le rapport de y' à y ni celui de x' à x, on ne peut déterminer le mouvement de ce centre que dans le cas où ces puiffances feroient conftantes. Il décriroit alors une parabole, & les deux corps fe mouvroient autour de lui, comme s'il étoit fixe.

PROBLÊME II.

359. Trois corps M, M', M'' s'attirant mutuellement en raifon directe des maffes & en raifon inverfe de la puiffance n des diftances, on propofe de déterminer leurs mouvements ? Fig. 150.

Suppofant que les trois corps font refpectivement en M, M', M'' & rapportant les trajectoires à l'axe AP, foit $AP = x$, $PM = y$, $AP' = x'$, $P'M' = y'$, $AP'' = x''$, $P''M'' = y''$, $MM' = z$, $M'M'' = z'$, $MM'' = z''$. Puifque chaque corps agit fur les deux autres proportionnellement à fa maffe divifée par la puiffance n de la diftance, on multipliera cette quantité par une conftante a, afin d'avoir la valeur abfolue de chaque force accélératrice. Ainfi le corps M attire le corps M' avec une force accélératrice $M'N' = \frac{aM}{z^n}$, & la force avec laquelle il attire le corps M'' eft $M''T'' = \frac{aM}{z''^n}$.

On a pareillement $\frac{aM'}{z^n}$ pour exprimer la force MN avec laquelle le corps M' attire le corps M, & $\frac{aM'}{z'^n}$ ou $M''N''$ pour la force attractive qu'il exerce sur le corps M''. On a enfin $MT = \frac{aM''}{z''^n}$ & $M'T' = \frac{aM''}{z'^n}$ pour représenter les forces attractatives du corps M'' sur les deux autres. Après avoir décomposé chacune de ces forces, en deux autres, l'une parallele à AP, l'autre perpendiculaire, on trouvera les valeurs suivantes qui exprimeront séparément toutes ces forces.

Pour M	Pour M'	Pour M''
$MN = \frac{aM'}{z^n}$	$M'N' = \frac{aM}{z^n}$	$M''N'' = \frac{aM'}{z'^n}$
$MO = \frac{aM'}{z^n} \cdot \frac{y'-y}{z}$	$M'O' = \frac{aM}{z^n} \cdot \frac{y'-y}{z}$	$M''O'' = \frac{aM'}{z'^n} \cdot \frac{y''-y'}{z'}$
$MQ = \frac{aM'}{z^n} \cdot \frac{x'-x}{z}$	$M'Q' = \frac{aM}{z^n} \cdot \frac{x'-x}{z}$	$M''Q'' = \frac{aM'}{z'^n} \cdot \frac{x''-x'}{z'}$
$MT = \frac{aM''}{z''^n}$	$M'T' = \frac{aM''}{z'^n}$	$M''T'' = \frac{aM}{z''^n}$
$MV = \frac{aM''}{z''^n} \cdot \frac{y''-y}{z''}$	$M'V' = \frac{aM''}{z'^n} \cdot \frac{y''-y'}{z'}$	$M''V'' = \frac{aM}{z''^n} \cdot \frac{y''-y}{z''}$
$MS = \frac{aM''}{z''^n} \cdot \frac{x''-x}{z''}$	$M'S' = \frac{aM''}{z'^n} \cdot \frac{x''-x'}{z'}$	$M''S'' = \frac{aM}{z''^n} \cdot \frac{x''-x}{z''}$

360. Cela posé, $MQ + MS$ étant la force du corps M parallélement à AP, on aura $(MQ + MS)\,dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$. On aura de même $(MV + MO)\,dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$.... $(M'S' - M'Q')\,dt = d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$...$(M'V' - M'O')dt = d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$... $(M''S'' + M''Q'')dt = -d\left(\frac{dx''}{dt}\right)$...$(M''V'' + M''O'')\,dt = -d\left(\frac{dy''}{dt}\right)$; & substituant les valeurs analytiques on aura les six équations suivantes,

$$\frac{aM'dt}{z^n}\cdot\frac{x'-x}{z}+\frac{aM''dt}{z''^n}\cdot\frac{x''-x}{z''}=d\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{aM''dt}{z'^n}\cdot\frac{x''-x'}{z'}-\frac{aMdt}{z^n}\cdot\frac{x'-x}{z}=d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$$

$$\frac{aM'dt}{z'^n}\cdot\frac{x''-x'}{z'}+\frac{aMdt}{z''^n}\cdot\frac{x''-x}{z''}=-d\left(\frac{dx''}{dt}\right)$$

$$\frac{aM'dt}{z^n}\cdot\frac{y'-y}{z}+\frac{aM''dt}{z''^n}\cdot\frac{y''-y}{z''}=d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{aM''dt}{z'^n}\cdot\frac{y''-y'}{z'}-\frac{aMdt}{z^n}\cdot\frac{y'-y}{z}=d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$$

$$\frac{aM'dt}{z'^n}\cdot\frac{y''-y'}{z'}+\frac{aMdt}{z''^n}\cdot\frac{y''-y}{z''}=-d\left(\frac{dy''}{dt}\right).$$

361. Si la premiere étant multipliée par M, la feconde par M', la troifieme par $-M''$, on ajoute les produits; & fi on traite de même les trois dernieres équations, on aura

$$M\,d\left(\frac{dx}{dt}\right)+M'd\left(\frac{dx'}{dt}\right)+M''d'\left(\frac{dx''}{dt}\right)=0,$$

$$M\,d\left(\frac{dy}{dt}\right)+M'd\left(\frac{dy'}{dt}\right)+M''d\left(\frac{dy''}{dt}\right)=0,$$

dont les intégrales

$$M\frac{dx}{dt}+M'\frac{dx'}{dt}+M''\frac{dx''}{dt}=C$$

$$M\frac{dy}{dt}+M\frac{dy'}{dt}+M''\frac{dy''}{dt}=C'$$

font encore voir que le mouvement du centre de gravité eft uniforme & rectiligne. Donc quelque foit, en général, le nombre des corps qui s'attirent mutellement, leurs actions réciproques n'influeront pas fur le mouvement de leur centre commun de gravité, & ce centre aura toujours la même vîteffe & la même direction qu'au commencement du mouvement.

362. Delà il ſuit que le centre de maſſes du ſyſtême planétaire eſt en repos, ou s'il ſe meut, que ſon mouvement eſt uniforme & en ligne droite. Il importe peu lequel de ces deux cas ait lieu, les mouvements relatifs ſeront les mêmes dans l'un & dans l'autre. Toutes les planetes & le ſoleil lui-même doivent donc ſe mouvoir autour de ce centre.

Mais la maſſe du ſoleil eſt ſi grande relativement à celle des planetes que quand elles ſe trouveroient toutes en conjonction, le centre de maſſes de tout le ſyſtême ne s'éloigneroit pas du centre du ſoleil de plus d'un diametre de cet aſtre. Le mouvement du ſoleil autour du centre du monde planétaire eſt donc bien peu de choſe; cependant on eſt obligé d'y avoir égard dans les recherches délicates.

363. Si après avoir multiplié la premiere des ſix équations générales trouvées ci-deſſus, par $M\frac{dx}{dt}$, la ſeconde par $M'\frac{dx'}{dt}$, la troiſieme par $-M''\frac{dx''}{dt}$, on ajoute les produits, leur ſomme donnera

$$-\frac{aMM'}{z^{n+1}}(x'-x)(dx'-dx)-\frac{aMM''}{z''^{n+1}}(x''-x)(dx''-dx)-\frac{aM'M''}{z'^{n+1}}(x''-x')(dx''-dx')$$
$$=M\frac{dx}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right)+M'\frac{dx'}{dt}d\left(\frac{dx'}{dt}\right)+M''\frac{dx''}{dt}d\left(\frac{dx''}{dt}\right);$$

& ſi on fait les mêmes opérations ſur les trois dernieres équations, le réſultat ſera

$$-\frac{aMM'}{z^{n+1}}(y'-y)(dy'-dy)-\frac{aMM''}{z''^{n+1}}(y''-y)(dy''-dy)-\frac{aM'M''}{z'^{n+1}}(y''-y')(dy''-dy')$$
$$=M\frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right)+M'\frac{dy'}{dt}d\left(\frac{dy'}{dt}\right)+M''\frac{dy''}{dt}d\left(\frac{dy''}{dt}\right).$$

Ajoutons ces deux équations, & pour abréger le calcul; remarquons

remarquons auparavant que ſi u, u', u'' expriment les vîteſſes des corps M, M', M'', on aura $u\,du = \frac{dx}{dt}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) \ldots\ldots u'\,du' = \frac{dx'}{dt}\,d\left(\frac{dx'}{dt}\right) + \frac{dy'}{dt}\,d\left(\frac{dy'}{dt}\right) \ldots\ldots u''\,du'' = \frac{dx''}{dt}\,d\left(\frac{dx''}{dt}\right) + \frac{dy''}{dt}\,d\left(\frac{dy''}{dt}\right)$. Remarquons auſſi que $zz = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 \ldots\ldots z''z'' = (x''-x)^2 + (y''-y)^2 \ldots\ldots z'z' = (x''-x')^2 + (y''-y')^2$; donc $z\,dz = (x'-x)(dx'-dx) + (y'-y)\,dy'-dy) \ldots\ldots$ $z''dz'' = (x''-x)(dx''-dx) + (y''-y)(dy''-dy) \ldots\ldots$ $z'\,dz' = (x''-x')(dx''-dx') + (y''-y')(dy''-dy')$. Cela poſé, nous trouverons que la ſomme de nos deux équations ſe réduit à

$$M\,u\,du + M'u'\,du' + M''u''\,du'' = -\frac{aMM'dz}{z^n} - \frac{aMM''dz''}{z''^n} - \frac{aM'M''dz'}{z'^n}.$$

Or l'intégrale de ce réſultat eſt

$$Mu^2 + M'u'^2 + M'u''^2 + \frac{2aMM'z^{1-n}}{1-n} + \frac{2aMM''z''^{1-n}}{1-n} + \frac{2aM'M''z'^{1-n}}{1-n} = C,$$

équation qui contient le principe de la *Conſervation des forces vives*, dont les Géometres modernes font grand uſage. Voyez la Dynamique de M. d'Alembert.

L'intégrale que nous venons de trouver, & les deux autres qui donnent le mouvement du centre de gravité, ſont les trois ſeules que l'on ait pû déduire généralement des ſix équations du problême. Il faudroit que les bornes du Calcul intégral fuſſent plus reculées qu'elles ne le ſont, pour pouvoir réſoudre complétement ce problême; mais au moins la voie eſt indiquée.

Le problême dont il s'agit, eſt devenu fameux dans ce

ſiecle par les travaux des Géometres qui ſe ſont occupés de ſa ſolution. Il eſt généralement connu ſous le nom de *Problême des trois corps ;* & comme la théorie de la lune en dépend, on eſpere que de nouveaux efforts ameneront de nouvelles découvertes ſur cet objet.

364. Pour appliquer les équations précédentes au mouvement de la lune, de la terre & du ſoleil, il faudroit ſuppoſer que $n = 2$, c'eſt-à-dire que la force centrale agit en raiſon inverſe du quarré de la diſtance ; il faudroit auſſi introduire trois autres équations dans le calcul : la raiſon en eſt que les premieres ne peuvent pas donner avec aſſez d'exactitude le mouvement de la lune, parce que ſon orbite n'eſt pas dans le plan de l'écliptique ; elle lui eſt inclinée d'environ cinq degrés. Or toutes les fois que le mouvement ſe fait ainſi dans différents plans, il y a trois équations de plus pour les trois nouvelles coordonnées que l'on eſt obligé d'introduire. Mais le degré de difficulté pour les intégrations eſt le même ; ſeulement le calcul devient plus long.

365. Il y a cependant un cas où on peut déterminer exactement le mouvement de pluſieurs corps qui exercent les uns ſur les autres une attraction mutuelle ; c'eſt celui dans lequel on ſuppoſe que leurs forces attractives ſont proportionnelles à leurs diſtances. Car alors ils décrivent des ellipſes autour de leur centre commun de gravité, pendant que ce centre ſe meut uniformément & en ligne droite. Voici comment on peut le démontrer ſans avoir recours au calcul qui précede.

Soient M, M', M'' les trois mobiles dont il faut déterminer le mouvement. Pour savoir quel doit être celui du corps M, par exemple, attiré par les deux autres M', M'', représentons d'abord par $MN = aM'.M'M$ l'action du corps M', & par $MN' = aM''.M''M$ celle du corps M''. Imaginons ensuite une ligne droite quelconque $m'Mm''$ & une perpendiculaire à cette droite ; après quoi nous décomposerons les deux forces MN, MN' chacune en deux autres, suivant les deux lignes Mm' & MQ ; ce qui nous donnera $MO = aM'.Mm' \ldots MO' = aM''.Mm'' \ldots MP = aM'.M'm' \ldots MP' = aM''.M''m''$, & si la résultante est représentée par MS, on aura $MT = aM'.Mm' - aM''.Mm'' \ldots MQ = aM''.M''m'' + aM'.M'm'$ FIG. 151.

Or le centre de gravité étant en G, on a $Mg = \frac{-M''.Mm'' + M'.Mm'}{M + M' + M''} \ldots Gg = \frac{M''.M''m'' + M'.M'm'}{M + M' + M''}$; donc $\frac{Gg}{Mg} = \frac{ST}{TM}$. D'où il suit que le point G est sur la direction de la résultante MS, & qu'ainsi l'action des deux corps M', M'' sur le corps M tend à le pousser vers le centre de gravité G avec la force $MS = \frac{MG.MT}{Mg} = a(M + M' + M'')MG$. Ces trois corps se meuvent donc, comme si n'ayant aucune force d'attraction, ils étoient attirés vers leur centre commun de gravité, en raison de leurs distances à ce centre, par un corps égal à leur somme. Ils décrivent donc chacun une ellipse autour de ce centre, & leurs temps périodiques sont égaux ; ce qui a généralement lieu, quelque soit le nombre des corps.

Fig. 152. 366. On peut déduire le même réſultat des équations générales. Car en prenant la ligne des x pour la route du centre de gravité G, & en ſuppoſant la vîteſſe de ce centre $= k$, l'abſciſſe $GP = X = kt - x$, on aura

$$M'(x' - x) + M''(x'' - x) = M'.PP' + M''.PP'' = (M + M' + M'')X$$

$$\ldots d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -d\left(\frac{dX}{dt}\right) \ldots M'(y' - y) + M''(y'' - y) = -(M + M' + M'')y.$$

Donc la premiere & la quatrieme équation donneront pour le mouvement du corps M les deux équations ſuivantes.

$$a(M + M' + M'')Xdt = -d\left(\frac{dX}{dt}\right)$$

$$a(M + M' + M'')ydt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right);$$

or ces équations ſont les mêmes que ſi ce corps étoit attiré vers le point G en raiſon des diſtances par la maſſe $M + M' + M''$. Il eſt donc démontré que dans le cas où pluſieurs mobiles s'attireroient mutuellement en raiſon directe de leurs diſtances, ils décriroient tous des ellipſes autour de leur centre commun de gravité, lequel cependant avanceroit uniformément dans une trajectoire rectiligne.]

ARTICLE II.

Du Mouvement d'un point libre ſollicité par des puiſſances quelconques, dans un milieu réſiſtant.

367. L'INERTIE étant une propriété générale de la matiere, un corps ne peut en faire mouvoir un autre, ſans lui communiquer une partie de ſon mouvement; & comme cette communication ne ſe fait jamais ſans une perte réelle pour le mobile, il eſt clair qu'en eſſuyant des pertes

réitérées à chaque inſtant, toute ſa vîteſſe doit être bientôt anéantie.

C'eſt auſſi ce que nous voyons arriver continuellement dans les mobiles qui nous entourent. Car le fluide dans lequel ils ſe meuvent, ne peut céder à leur impreſſion, & ſe déplacer pour leur ouvrir un paſſage, ſans recevoir de leur part le mouvement qui l'y oblige. Ce fluide, par la ſeule inertie, réſiſte donc à leur impulſion, avec autant d'efficacité que s'il avoit un mouvement oppoſé à celui des mobiles & égal à ſon inertie : delà vient que plus il a de denſité, plus ſa réſiſtance eſt grande.

Soit A une ſurface plane expoſée au choc direct d'un fluide, ou mue elle-même dans ce fluide, ſuivant une direction perpendiculaire, avec la vîteſſe u. Elle parcourra l'eſpace $u\,d\,t$ dans l'inſtant $d\,t$, & par conſéquent elle aura déplacé un volume $A\,u\,d\,t$ de fluide. Soit donc appellée D la denſité de ce fluide, & nous aurons $A\,D\,u\,d\,t$ pour exprimer la maſſe qui aura été miſe en mouvement, dans l'inſtant $d\,t$.

Lorſque cette maſſe aura reçu de la ſurface mobile la vîteſſe u, ſa quantité de mouvement ſera donc $A\,D\,u^2d\,t$, & cet effet de l'impulſion produiſant dans le fluide une réſiſtance égale au mouvement communiqué, il en réſultera $M\,d\,u = A\,D\,u^2d\,t$, en appellant M la maſſe du corps qui préſente la ſurface A au choc direct du fluide, & en déſignant par $d\,u$ la diminution inſtantanée de vîteſſe cauſée par la réſiſtance du fluide.

368. On peut donc regarder la réſiſtance d'un fluide quelconque, comme une force retardatrice $\frac{ADu^2}{M}$, qui eſt toujours oppoſée directement à l'impulſion du mobile ; & cette force, comme l'on voit, eſt en raiſon compoſée de la ſurface du mobile, du quarré de ſa vîteſſe, & de la denſité du fluide. Enſorte que, toutes choſes d'ailleurs égales, *un corps mû dans un même fluide éprouve une réſiſtance proportionnelle au quarré de ſa vîteſſe.*

Telle eſt, en général, la meſure de la réſiſtance que l'inertie des fluides oppoſe au mouvement des corps. Mais cette cauſe eſt-elle la ſeule qui retarde les mobiles dans leur courſe ! Il paroît que non. L'expérience prouve que l'adhérence mutuelle des parties des fluides produit une autre eſpece de réſiſtance à laquelle on doit avoir égard. Mais comme cette viſcoſité plus ou moins forte dans certains fluides, eſt ſenſiblement la même dans des inſtants égaux, au lieu que la réſiſtance qui provient de l'inertie eſt proportionnelle au quarré de la vîteſſe, il arrive que l'effet de la viſcoſité n'eſt preſque pas remarquable dans les mouvements très-rapides. Il l'eſt au contraire dans les mouvements lents, & on ne peut s'empêcher alors d'en tenir compte.

369. Si la ſurface A ne ſe préſente pas directement au choc du fluide, on décompoſera la vîteſſe oblique u en deux autres, qui en appellant a l'angle formé par la ſurface & par le fluide, ſeront exprimées par $u \cos a$ & $u \sin a$. La premiere ſera dans la direction de la ſurface ; la ſeconde lui ſera perpendiculaire. Or le fluide ne réſiſtera qu'à la

derniere ; ainsi en substituant $u \sin a$ au lieu de u dans la formule $D A u^2$, on aura $D A u^2 \sin^2 a$ pour l'expression de la résistance, dans le cas du choc oblique ; mais il ne faudra point perdre de vue que cette force s'exerce perpendiculairement à la surface mobile A. Il suit delà que, *toutes choses d'ailleurs égales, la résistance d'un même fluide sur une surface plane & oblique est proportionnelle au quarré du sinus de l'angle d'incidence.*

370. Dans ce dernier cas, il est évident que $A \sin^2 a$ exprime la surface qui étant exposée au choc direct du fluide, éprouveroit la même résistance que la surface A mûe obliquement. D'où on voit généralement que pour déterminer la résistance qu'un fluide doit opposer à une surface quelconque, il suffit de connoître la surface plane qui éprouveroit par un choc direct la même résistance. Aussi, pour ne pas embarrasser inutilement le calcul avec le facteur $D u^2$, regarderons-nous dans les exemples suivants ces surfaces directement exposées au fluide, comme les mesures naturelles des résistances qu'il produit.

371. Supposons donc un prisme mû dans un fluide quelconque parallélement à ses bases ; il suffira d'en considérer une coupe $AMHBK$, & de multiplier la résistance linéaire qu'il éprouve, par la longueur du solide, pour avoir la surface qui étant exposée au choc direct éprouveroit la même résistance que le solide. Fig. 153.

Soit BA la direction du mouvement, Mm l'élément de la courbe, MV une droite parallele à BA, on aura

mMr pour l'angle d'incidence du fluide ſur Mm, & $Mm \, . \, \mathit{fin}^2 mMV$ pour la réſiſtance que cet élément éprouve ſuivant la perpendiculaire MN. Cela poſé, rapportons les points de la courbe à l'axe AB, & ſuppoſons $AP = x$, $PM = y$, $Mm = ds$. Si on décompoſe l'effort $Mm \, . \, \mathit{fin}^2 mMV$, ou $ds \, . \, \frac{dy^2}{ds^2}$ en deux autres NO & OM, l'un parallele & l'autre perpendiculaire à l'axe AP, on aura par les triangles ſemblables NOM, Mmr, l'effort $NO = dy \, . \, \frac{dy^2}{ds^2}$, & l'effort $OM = dx \, . \, \frac{dy^2}{ds^2}$. Donc l'effort total ſuivant l'axe AB aura pour expreſſion $\int \frac{dy^3}{ds^2}$, & celui qui s'exerce perpendiculairement à cet axe, ſera exprimé par $\int \frac{dx \, dy^2}{ds^2}$.

372. Ces intégrales au reſte doivent être priſes dans toute la partie HMK terminée aux points H & K qui ſont les plus éloignés de l'axe AB; car l'autre partie HBK n'éprouve aucune ré ſtance de la part du fluide. Si la courbe eſt ſymmétrique des deux côtés de l'axe AB, l'effort perpendiculaire à cet axe ſera détruit, & il ne reſtera que $\int \frac{dy^3}{ds^2}$ effort parallele à l'axe & double de celui qui s'exerce dans l'une des parties HA.

373. Pour avoir la direction & la valeur de tout l'effort qui réſulte du choc d'un fluide ſur toutes les parties de cette coupe, on prendra la ſomme des moments des forces MF par rapport à l'axe AP, que l'on diviſera par la ſomme de ces forces, & on aura la diſtance GE de leur réſultante à l'axe. On prendra de même la ſomme des moments des forces OM par rapport au point A, que l'on diviſera par

la

la somme de ces forces, & le quotient sera la distance AE de leur résultante à ce point. On aura donc

$$AE = \frac{\int x\,dx \,.\, \frac{dy^2}{ds^2}}{\int dx \,.\, \frac{dy^2}{ds^2}} \;\ldots\; GE = \frac{\int y\,dy \,.\, \frac{dy^2}{ds^2}}{\int \frac{dy^2}{ds^2}}.$$

Après avoir ainsi déterminé le point G, on prendra $GI = \int \frac{dx\,dy^2}{ds^2}$ & $GL = \int \frac{dy^3}{ds^2}$; on aura donc, en achevant le rectangle, la diagonale GT pour représenter la valeur & la direction de la résistance totale sur la coupe HMK.

Exemple.

374. La coupe du solide proposé étant un cercle dont le diametre $AB = 2a$, on demande quelle doit être la résistance totale du fluide, parallélement à AB? Fig. 153.

Dans ce cas, $yy = 2ax - xx \ldots ds^2 = \frac{a^2 dy^2}{a^2 - y^2} \ldots \frac{dy^3}{ds^2} = dy - \frac{yydy}{a^2}$. L'intégrale sera donc $y - \frac{y^3}{3a^2}$, & en la prenant depuis A jusqu'en H, on aura $\frac{2}{3}a$ dont le double $\frac{4}{3}a$ exprime la résistance que le demi-cercle HAK éprouve dans la direction de l'axe AB. Car la résistance totale du fluide se réduit à celle-là seule, puisque l'autre est nulle. On trouvera donc la surface qui étant exposée au choc direct du fluide, éprouveroit la même résistance que la surface convexe du cylindre, en prenant les deux tiers de sa coupe rectangulaire dans le sens de l'axe. Mais puisque $\frac{4}{3}a$ exprime la résistance que le fluide oppose au demi-cercle HAK, & que $2a$ est celle que le diametre HK éprouve de la part du même fluide, il faut en conclure que la premiere n'est que les deux tiers de la seconde.

Fig. 154. 375. Considérons maintenant la résistance qu'éprouveroit un solide de révolution mû suivant son axe. Soit Mm un élément de la courbe, lequel en tournant décrit un cône tronqué, dont on prendra la partie comprise entre deux apothêmes infiniment proches. Cette partie que nous désignerons par ω, étant plane, elle éprouvera une résistance $\omega \cdot \frac{dy^2}{ds^2}$, puisque $\frac{dy}{ds}$ est le sinus d'incidence.

Or cette résistance s'exerçant perpendiculairement à l'élément ω, on la décomposera en deux autres, l'une parallele à l'axe, l'autre perpendiculaire. La premiere aura pour valeur $\omega \cdot \frac{dy^2}{ds^2} \cdot \frac{dy}{ds}$; & puisque l'angle d'incidence pour tous les éléments ω est le même, & que la somme de tous les éléments ou la surface du cône tronqué est $2cyds$, on aura pour la résistance opposée à cette surface, $\frac{2cydy^3}{ds^2}$; & par conséquent $2c\int\frac{ydy^3}{ds^2}$ exprimera la résistance que le solide entier doit éprouver suivant son axe.

Fig. 153. Si le solide proposé est une sphere dont le sommet soit A, nous aurons $yy = 2ax - xx \ldots ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dy^2}{a^2-y^2} \ldots \frac{ydy^3}{ds^2} = ydy - \frac{y^3dy}{aa}$. L'intégrale est $\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4a^2}$; ensorte que prenant $y = a$, elle se réduit à $\frac{1}{4}a^2$. Donc la résistance sur la sphere entiere aura pour valeur $2c \cdot \frac{1}{4}a^2 = \frac{ca^2}{2}$ = à la moitié de celle qu'éprouveroit un de ses grands cercles.

★ [376. Pour connoître la courbure que doit prendre dans l'équilibre une corde ou une voile attachée à deux Fig. 155. points fixes & enflée par le vent, on remarquera d'abord que l'action de ce fluide sur l'élément Mm est proportion-

nelle à cet élément & au quarré du ſinus d'incidence. On remarquera enſuite que ſi la direction du vent eſt parallele aux ordonnées PM, cette action doit être exprimée par $a \,.\, Mm \,.\, \sin^2 PMm = a\, ds \,.\, \frac{dx^2}{ds^2}$.

Cela poſé, l'équation générale d'une corde attachée à deux points fixes & ſollicitée par deux puiſſances quelconques X & Y eſt (181)

$$d\left(\frac{(Ydx + Xdy)r}{ds^2}\right) + \frac{Ydy - Xdx}{ds} = 0.$$

Or $\frac{Ydx + Xdy}{ds}$ repréſente la force normale qui réſulte de toutes les puiſſances, & qui dans le cas préſent $= \frac{a\,ds\,dx^2}{ds^2}$. La force tangentielle au contraire eſt repréſentée par $\frac{Ydy - Xdx}{ds}$, & cette force eſt nulle dans la ſuppoſition dont il s'agit ici. Donc l'équation de la courbe cherchée eſt $d\left(\frac{ar\,dx^2}{ds^2}\right) = 0$, qui a pour intégrale $\frac{ar\,dx^2}{ds^2} = ab$; & ſubſtituant la valeur du rayon oſculateur $r = \frac{dy}{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}$, on aura $\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{\frac{dx^2}{ds^2}} = \frac{dy}{b}$; d'où en intégrant $C - y = \frac{b\,ds}{dx}$; équation qui eſt préciſément celle d'une corde tendue par ſon propre poids. Ainſi la courbure que le vent fait prendre à une corde ou à une voile eſt préciſément la même qu'elle prendroit en vertu de ſa gravité. La ſeule différence eſt qu'au lieu d'être vertical, l'axe eſt placé dans la direction du fluide]. *

Ces premieres notions ſur la réſiſtance des fluides étoient néceſſaires pour faciliter la meſure des effets qui en ré-

fultent dans le mouvement des corps : mais pour la facili-ter encore davantage, on confidere les corps comme de fimples points, & la réfiftance du milieu comme une force tangentielle toujours oppofée à la direction du mouvement.

377. Tous les fluides connus réfiftant aux mobiles en raifon du quarré de leur vîteffe u, défignons par b la vîteffe avec laquelle ils éprouveroient dans un milieu quelconque une réfiftance égale à l'action de la gravité g. Nous aurons $\frac{gu^2}{b^2}$ pour l'expreffion générale & la mefure abfolue de cette réfiftance. La quantité b dépendra évidemment de la denfité du fluide ; elle ne fera donc conftante que dans le cas où la denfité même du milieu réfiftant ne variera point.

Celle de l'air, par exemple, diminue fenfiblement à mefure que l'on s'éleve dans l'atmofphere. Celle de l'eau diminue de même, à proportion que l'on fe rapproche de fa furface ; car perfonne n'ignore combien les eaux de la mer font denfes à de grandes profondeurs. Alors donc la quantité b doit être variable, & le coëfficient $\frac{g}{b^2}$ que l'on appelle l'*expofant de la réfiftance*, doit dépendre à chaque inftant de la pofition actuelle du mobile.

378. Si pour une plus grande généralité on fuppofe la réfiftance du milieu proportionnelle à la puiffance m de la vîteffe, ou ce qui revient au même, fi on exprime cette réfiftance par $\frac{g\,u^m}{b^m}$, ce n'eft pas que dans la nature on trouve des exemples de cette variété. Le feul cas qu'elle femble nous offrir eft celui ou $m = 2$; les autres ne font que des hypothefes purement mathématiques, dont on ne

fait mention que par rapport aux conféquences remarquables qui en réfultent quelquefois.

379. Soit donc un corps mû fur une ligne droite en vertu d'une impulfion primitive ; la réfiftance que le milieu lui oppofe, peut bien altérer fa vîteffe, mais non fa direction. Appellant donc x l'efpace parcouru pendant le temps t depuis le commencement du mouvement, & fuppofant la refiftance du milieu proportionnelle au quarré de la vîteffe, on aura $\frac{gu^2}{b^2}$ pour l'expreffion de la force rétardatrice. Donc fi la denfité de ce fluide eft uniforme, on aura $du = -\frac{gu^2 dt}{b^2}$, ou $-\frac{du}{uu} = \frac{g\,dt}{bb}$; d'où on tire $-\frac{du}{u} = \frac{gu\,dt}{bb} = \frac{g\,dx}{bb}$.

Les intégrales de ces deux équations font $\frac{gt}{bb} = \frac{1}{u} + B$... $lu = A - \frac{gx}{bb}$. Soit V la vîteffe initiale, alors $t = 0$,... $x = 0$, ce qui donne $A = lV$... $B = -\frac{1}{V}$; donc $\frac{gt}{bb} = \frac{1}{u} - \frac{1}{V}$... $l\frac{V}{u} = \frac{gx}{bb}$. On aura donc au bout d'un temps quelconque t la vîteffe $u = \frac{bb}{gt + \frac{bb}{V}}$, & l'efpace parcouru $x = \frac{bb}{g} l\left(1 + \frac{Vgt}{bb}\right)$.

Le mobile ayant parcouru l'efpace x, on trouvera de même que fa vîteffe $u = Ve^{-gx:bb}$, & que le temps employé à parcourir cet efpace $t = (e^{gx:bb} - 1)\frac{b^2}{Vg}$. Le mouvement du corps fera donc entiérement déterminé, & on voit que malgré la réfiftance du milieu, il fera continué à l'infini.

380. Suppofons en général la réfiftance $= \frac{gu^m}{b^m}$ & la

densité du milieu constante; nous aurons $du = -\frac{gu^m}{b^m} dt$, & en substituant $\frac{dx}{u}$ à la place de dt, nous trouverons que $du = -\frac{gu^{m-1}}{b^m} dx$. Les équations du mouvement seront donc $u^{-m} du = -\frac{g\,dt}{b^m} \ldots u^{1-m} du = -\frac{g\,dx}{b^m}$, dont les intégrales sont $\frac{V^{1-m} - u^{1-m}}{1-m} = \frac{gt}{b^m} \ldots \frac{V^{2-m} - u^{2-m}}{2-m} = \frac{gx}{b^m}$, en les prenant de maniere que x & t s'évanouissent lorsque $u = V$.

On peut déterminer par-là l'espace parcouru au bout d'un temps quelconque t, & la vîtesse du mobile. Si m est moindre que 2, l'équation $\frac{V^{2-m} - u^{2-m}}{2-m} = \frac{gx}{b^m}$ fait voir que la vîtesse u est zéro, ou que le mouvement doit cesser lorsque le mobile a parcouru l'espace $x = \frac{b^m}{g} \cdot \frac{V^{2-m}}{2-m}$; mais si $m = 2$, ou s'il est plus grand que 2, cet espace n'est plus fini; ainsi le mouvement doit durer à perpétuité.

381. Cherchons maintenant quel doit être le mouvement d'un corps grave qui descend du repos en ligne droite à travers un milieu uniformément dense résistant en raison directe du quarré de la vîtesse.

La force accélératrice étant alors la gravité g, & la force rétardatrice étant $\frac{gu^2}{b^2}$, on aura l'équation $du = \left(g - \frac{gu^2}{b^2}\right) dt$, qui par la substitution de $\frac{dx}{u}$ au lieu de dt, deviendra $u\,du = \left(g - \frac{gu^2}{b^2}\right) dx$; d'où on tire facilement $g\,dt = \frac{b^2\,du}{b^2 - u^2} \ldots g\,dx = \frac{b^2\,u\,du}{b^2 - u^2}$. Les intégrales prises de maniere que u, x & t s'évanouissent en même temps, sont $gt = \frac{b}{2} l \frac{b+u}{b-u} \ldots 2gx = b^2 l \frac{b^2}{b^2 - u^2}$. Elles

donnent pour l'espace x une vîtesse $u = b\sqrt{(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}})}$, & un temps $t = \frac{b}{g}\, l\left(e^{\frac{gx}{bb}} + \sqrt{(e^{\frac{2gx}{bb}} - 1)}\right)$. Telles sont les formules dont on doit faire usage pour déterminer le mouvement des corps graves, quand on veut avoir égard à la résistance de l'air.

382. Si le mobile a été lancé de bas en haut avec une certaine vîtesse V, alors la pesanteur concourt avec la résistance du milieu à retarder le mouvement. On a donc $du = -g\,dt - \frac{g u^2 dt}{b^2} \ldots u\,du = -g\,dx - \frac{g u^2 dx}{b^2}$; ces équations séparées donnent $g\,dx = \frac{-b^2 u\,du}{b^2 + uu} \ldots g\,dt = \frac{-b^2\,du}{b^2 + u^2}$, qui en intégrant deviennent $2gx = b^2 l \frac{b^2 + V^2}{b^2 + u^2} \ldots \frac{gt}{b} =$ *Arc tang* $\frac{V}{b}$ — *Arc tang* $\frac{u}{b}$, ou *tang* $\frac{gt}{b} = \frac{bV - bu}{bb + Vu}$. Ces équations donnent, au bout de l'espace x, la vîtesse $u = \sqrt{\left(e^{\frac{-2gx}{bb}}(bb + VV) - bb\right)}$ & le temps employé à parcourir cet espace est $t = \frac{b}{g}$ *Arc tang* $\frac{V}{b}$ — $\frac{b}{g}$ *Arc tang* $\sqrt{(e^{\frac{-2gx}{bb}}\left(1 + \frac{VV}{bb}\right) - 1)}$.

383. Supposant $u = 0$, le corps cessera de monter, & la hauteur à laquelle il se sera élevé, aura pour expression $\frac{bb}{2g}\, l\left(1 + \frac{VV}{bb}\right)$. Si par exemple la vîtesse V de projection est égale à b, ou est précisément celle qui éprouve de la part du fluide une résistance égale à la gravité, la hauteur à laquelle s'élevera le mobile à travers un milieu résistant, sera à celle qu'il atteindroit dans le vuide, comme le logarithme de 2 est à l'unité. Quant au temps nécessaire

pour monter à cette hauteur dans le milieu résistant, il est au temps que le corps employeroit dans le vuide, comme 3,141 &c. est à 4.

Application de la théorie précédente à l'expérience.

384. D'APRÈS la théorie que nous avons exposée (368) il semble que l'on devroit conclure que la résistance d'un fluide sur la surface plane A qui lui est présentée directement, a pour mesure $\frac{ADV^2}{M}$, M étant la masse du mobile, V sa vîtesse, & D la densité du fluide. Mais ce résultat n'est conforme à la vérité, qu'en ce qu'il fait voir que la résistance est proportionnelle au quarré de la vîtesse ; car pour avoir la valeur absolue de cette résistance, il seroit nécessaire de connoître la nature des fluides beaucoup mieux qu'on ne la connoît.

385. Newton ayant pris l'expérience pour guide dans cette recherche, conclut de ses divers résultats que les fluides résistoient moitié moins que la théorie précédente ne l'indique. Si la démonstration qu'il en donne (*Princ. Math. Lib. II. Sect. VII*) ne paroît pas assez directe, on ne peut nier du moins que sa conclusion ne soit conforme à ses expériences. Aussi croyons-nous devoir nous en tenir à sa théorie, en attendant que la Physique jette un plus grand jour sur cette matiere. Il est vrai que par de nouvelles expériences faites avec beaucoup de soin, la résistance des fluides ne paroît pas suivre exactement le rapport de leur

densité

denſité ni celui des ſurfaces qu'ils choquent : mais cela n'empêche pas que ſa meſure, telle que Newton l'a admiſe, ne ſe vérifie d'une maniere très-ſatisfaiſante, dans les applications que nous allons en faire.

Ces applications ſont toutes relatives à la chûte des corps graves dans un milieu réſiſtant ; & comme les expériences qui vont être rapportées, furent faites avec des corps ſphériques, il eſt à propos de calculer d'abord la réſiſtance qu'un globe quelconque doit éprouver dans un fluide.

386. Soit donc a le diametre de ce globe, D' ſa denſité ; ſon volume ſera $\frac{1}{6}a^3c$, ſa maſſe aura pour expreſſion $\frac{1}{6}a^3c \,.\, D'$; la ſurface de ſon grand cercle ſera exprimée par $\frac{1}{4}a^2c$, & par conſéquent la ſurface plane A qui éprouveroit la même réſiſtance que le globe ſera $\frac{1}{8}a^2c$ (370). La formule de la réſiſtance deviendra donc, en ſubſtituant ces valeurs, $\frac{1}{2} \,.\, \frac{\frac{1}{8}a^2c \,.\, D}{\frac{1}{6}a^3c \,.\, D'} V^2$, ou $\frac{3}{8} \,.\, \frac{D}{D'} \,.\, \frac{V^2}{a}$.

Or cette formule ayant déja été repréſentée par $\frac{g}{bb} V^2$; nous pouvons en conclure que $\frac{g}{bb} = \frac{3}{8} \,.\, \frac{1}{a} \,.\, \frac{D}{D'}$; d'où on tire $\frac{bb}{g} = \frac{8}{3} a \,.\, \frac{D'}{D}$. Il faudra donc connoître le rapport de la denſité du globe à celle du fluide, ce qui ne ſera pas difficile, en comparant le poids du globe à celui d'un pareil volume de fluide.

387. Au reſte, on ne doit pas entendre ici par g la force de la gravité, ou la vîteſſe 30, 196 qu'elle communique aux corps graves dans une ſeconde ; car tout corps plongé dans un fluide perdant une partie de ſon poids égale au poids du volume de fluide déplacé, & cette partie

étant $\frac{D}{D'}$, il eſt clair que $g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) 30,196$.

388. Nous avons trouvé ci-deſſus qu'un corps qui deſcend du repos dans un milieu réſiſtant, devoit parcourir l'eſpace x dans le temps $t = \frac{b}{2g} l \left[\frac{1 + \sqrt{(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}})}}{1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}})}} \right]$.

Donc $e^{\frac{2gt}{b}} = \frac{1 + \sqrt{(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}})}}{1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}})}} \ldots \sqrt{(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}})}$ $= \frac{e^{\frac{2gt}{b}} - 1}{e^{\frac{2gt}{b}} + 1} \ldots 1 - e^{\frac{-2gx}{bb}} = \frac{(e^{\frac{2gt}{b}} - 1)^2}{(e^{\frac{2gt}{b}} + 1)^2} \ldots$ $e^{\frac{-2gx}{bb}} = \frac{4e^{\frac{2gt}{b}}}{(e^{\frac{2gt}{b}} + 1)^2} \ldots e^{\frac{gx}{bb}} = \frac{e^{\frac{2gt}{b}} + 1}{2e^{\frac{gt}{b}}} =$ $\frac{e^{\frac{gt}{b}} + e^{\frac{-gt}{b}}}{2}$; donc enfin $x = \frac{bb}{g} l \left(\frac{e^{\frac{gt}{b}} + e^{\frac{-gt}{b}}}{2} \right)$. C'eſt la valeur de l'eſpace parcouru au bout du temps t.

389. Comme dans les différents cas que nous avons à examiner, le temps eſt de quelques ſecondes, il eſt clair que la quantité $e^{\frac{gt}{b}}$ doit être un nombre aſſez conſidérable ; on peut donc ſans craindre aucune erreur notable rejetter du calcul le terme $e^{\frac{-gt}{b}}$. Ainſi on aura $x = \frac{bb}{g} l \frac{e^{\frac{gt}{b}}}{2} = \frac{bb}{g} \left(\frac{gt}{b} - l2 \right) = bt - \frac{bb}{g} \cdot 0,6931472$; ce qui montre déja que le mouvement ſera uniforme au bout de quelques ſecondes.

La quantité b eſt, comme nous l'avons déja vu, la plus grande vîteſſe que le mobile puiſſe acquérir dans ſa chûte; & quoiqu'à la rigueur il ne puiſſe l'avoir qu'après un temps infini, ſa vîteſſe cependant n'en différera, au bout de quelques ſecondes que d'une quantité abſolument inſenſible. Cela poſé, voici quelques expériences faites par Newton, & rapportées dans la Section VII. Prop. XL de ſes Principes.

I.

390. Un globe dont le poids dans l'air étoit de 156 grains $\frac{1}{4}$ (livre Romaine) & dont le poids dans l'eau étoit de 77 grains, parcourut en quatre ſecondes de temps, une hauteur de 112 pouces de Londres, dans un vaſe plein d'eau de pluie.

Commençons par réduire ces meſures à celles de Paris. Le pied de Londres eſt à celui de Paris : : 811 : 864 ; ainſi la hauteur dont ce globe deſcendit, étoit de 105,13 pouces de Paris. La livre Romaine contient 6638 grains de la livre de Paris; & par conſéquent l'once de la livre Romaine, qui en eſt la douzieme partie, contient $553\frac{1}{6}$ de nos grains. Enfin le grain de la livre Romaine qui eſt la 480eme partie de l'once, vaut 1,15243 de nos grains.

Toute réduction faite, il ſuit que le poids du globe dans l'air étoit de 180,07 grains, livre de Paris, & que ſon poids dans l'eau étoit 88,74 grains. La différence de ces deux poids, ou 91,33 grains exprime donc le poids d'un pareil volume d'eau; & comme la denſité de l'air eſt la 850eme partie de celle de l'eau, il faut en conclure qu'un pareil volume d'air

pese $\frac{91,33}{850}$ ou 0,11 grains. Donc le poids du globe dans le vuide est de 180,18 grains, & le poids d'un pareil volume d'eau dans le vuide est de 91,44 grains; donc $\frac{D'}{D} = \frac{18018}{9144}$.

391. On peut maintenant déterminer le diametre du globe, d'une maniere plus exacte qu'on ne pourroit le faire par la méthode directe. Car si ce diametre est évalué en pieds, la solidité du globe sera $\frac{1}{6}a^3c$ pieds cubes. Or un pareil volume d'eau pese 91,44 grains; & on sait d'ailleurs qu'un pied cube d'eau de pluie pese 70 ℔, ou 70 . 9216 grains; nous aurons donc $\frac{1}{6}a^3c \,.\, 70 \,.\, 9216 = 91,44$; d'où on tire $\frac{1}{a^3} = \frac{c \,.\, 70 \,.\, 1536}{91,44}$, ce qui mis en calcul par logarithmes donne

$L\,c$	=	0,4971499
L 70	=	1,8450980
L 1536	=	3,1863912
Somme	=	5,5286391
L 91,44	=	1,9611362
Reste	=	3,5675029

Ce logarithme répond à la valeur de $\frac{1}{a^3}$; donc 1,1891676 répond à la valeur de $\frac{1}{a}$, & pour celui du diametre même a nous aurons 8,8108324 qui répond à 0,06469 pieds. Reste à calculer la valeur $\frac{bb}{g} = \frac{8}{3}a \,.\, \frac{D'}{D} = \frac{6006}{1143}a$.

$L\,a$	=	8,8108324
L 6006	=	3,7785853
Somme	=	2,5894177
L 1143	=	3,0580462
Reste	=	9,5313715

pour le logarithme de $\frac{bb}{g}$. Or $g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) 30,196 = \frac{8874}{18018} \cdot 30,196$; donc en suivant le même procédé, nous trouverons

$$\begin{array}{rcl} L\ 8874 & = & 3,9481194 \\ L\ 30,196 & = & 1,4799494 \\ \hline \textit{Somme} & = & 5,4280688 \\ L\ 18018 & = & 4,2557066 \\ \hline \textit{Reste} & = & 1,1723622 \end{array}$$

pour le logarithme de g; celui de $\frac{bb}{g}$ a été trouvé 9,5313715; donc $l\,bb = 0,7037337$, & $l\,b = 0,3518669$. Cela posé, puisque nous avons l'espace parcouru $x = bt - \frac{bb}{g}$. 0,6931472, & que $t = 4''$, la suite du calcul nous donnera

$$\begin{array}{rcl} Lb & = & 0,3518669 \\ Lt & = & 0,6020600 \\ \hline \textit{Somme} & = & 0,9539269 \end{array}$$

Ce logarithme répond à 8,9935; donc $bt = 8,9935$ pieds. D'ailleurs nous venons de trouver que le logarithme de $\frac{bb}{g}$ étoit 9,5313715; celui de 0,6931472 est 9,8408254; donc $l\left(\frac{bb}{g} \cdot 0,6931472\right) = 9,3721969$; & $\frac{bb}{g} \cdot 0,693$ &c. $=$ 0,2356. Donc enfin l'espace que ce globe devoit parcourir en $4''$ est de 8,7579 pieds, lesquels réduits en pouces donnent 105,0948 pouces. Il en parcourut 105,13, suivant l'expérience de Newton. Ainsi la théorie est parfaitement d'accord avec l'expérience.

II.

392. Un globe dont le poids dans l'air étoit de 76 grains $\frac{1}{3}$, (livre Romaine) & de 5 grains $\frac{1}{16}$ dans l'eau,

descendit en 15″ de la même hauteur, 112 pouces de Londres.

En multipliant ces poids par 1,15243, on a 87,97 grains de Paris pour le poids du globe dans l'air, & $5\frac{5}{6}$ grains pour son poids dans l'eau. La différence ou le poids d'un pareil volume d'eau est 82,14 dont la 850eme partie ou 0,09 est le poids d'un pareil volume d'air. Donc le poids du globe dans le vuide est 88,06 grains, & le poids d'un pareil volume d'eau est 82,23. Donc $\frac{D'}{D} = \frac{8806}{8223}$. Mais $\frac{1}{a^3} = \frac{c \cdot 70 \cdot 1536}{82,23}$; nous aurons donc

Log du Numé.	=	5,5286391
Log. du Dén.	=	1,9150303
$L\frac{1}{a^3}$	=	3,6136088
$L\frac{1}{a}$	=	1,2045363
$L\,a$	=	8,7954637

Calculons à présent la formule $\frac{bb}{g} = \frac{8}{3}a \cdot \frac{D'}{D} = \frac{70448}{24669}a$.

L 70448	=	4,8478687
$L\,a$ ...	=	8,7954637
Somme...	=	3,6433324
L 24669	=	4,3921515
Reste...	=	9,2511809

pour le logarithme de $\frac{bb}{g}$. Or $g = \frac{583}{8806}\,30,196$; donc $lg = l\,583 + l\,30,196 - l\,8806$

L 583	=	2,7656686
L 30,196	=	1,4799494
Somme	=	4,2456180
L 8806	=	3,9447787
Reste	=	0,3008393

D'ailleurs nous venons de voir que $l\frac{bb}{g} = 9,2511809$; donc ajoutant le logarithme de g, on aura celui de $bb =$ 19,5520202, dont la moitié 9,7760101 sera le logarithme de b. Or l'espace parcouru $x = bt - \frac{bb}{g}.0,6931472$, & le temps t employé à le parcourir = 15″; il sera donc facile d'obtenir le dernier résultat de notre calcul en procédant de la maniere suivante :

$L\,b = 9,7760101$		$L\,\frac{bb}{g} = 9,2511809$
L 15 $= 1,1760913$		L 0,693 &c. $= 9,8408254$
Somme $= 0,9521014$		*Somme* $= 9,0920063$

Le logarithme 0,9521014 répond à 8,9557; le logarithme 9,092063 répond à 0,1236; la différence de ces deux nombres est 8,8321 pieds ou 105,98 pouces. Ainsi la théorie est encore bien conforme à l'expérience, puisque la hauteur parcourue fut de 105,13 pouces.

III.

393. Les deux expériences que nous venons de rapporter, furent faites dans l'eau. Celle qui suit, fut faite dans l'air.

Un globe de verre pesant 483 grains dans l'air, employa

8″ $\frac{1}{5}$ à tomber du haut de l'église de Saint Paul de Londres, c'est-à-dire, d'une hauteur de 220 pieds d'Angleterre. Son diametre étoit de 5 pouces. Réduisant le tout à nos mesures on trouvera que ce globe pesoit 556,23 grains; qu'il avoit 0,39111 pieds en diametre, & qu'il parcourut en 8″ $\frac{1}{5}$ une hauteur de 206 pieds $\frac{1}{2}$. Voyons donc si la théorie précédente donne cet espace pour résultat.

Le diametre de ce globe étant 0,39111, le poids d'un pareil volume d'eau est $\frac{1}{6} c a^3 . 70 . 9216$ dont la 850^{em} partie ou 23,774 grains est le poids d'un pareil volume d'air. Le poids du globe dans le vuide est donc de 580 grains, & $\frac{D'}{D} = \frac{580}{23,77}$. Or $\frac{bb}{g} = \frac{8}{3} a$. $\frac{D'}{D} = \frac{4640}{71,32}$. 0,39111. On aura donc

L 4640	=	3,6665180
L 0,39111	=	9,5922960
Somme	=	3,2588140
L 71,32	=	1,8532113
Reste	=	1,4056027

pour le logarithme de $\frac{bb}{g}$; & puisque $g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) 30,196 = \frac{556,23}{580} . 30,196$, on trouvera

L 556,23	=	2,7452544
L 30,196	=	1,4799494
Somme	=	4,2252038
L 580	=	2,7634280
Reste	=	1,4617758

pour le logarithme de g, auquel ajoutant celui de $\frac{bb}{g}$, on aura

aura 2,8673785 pour le logarithme de bb. Celui de b sera donc 1,4336892, qui étant ajouté à $l\,8'',2 = 0,9138138$ donnera $lbt = 2,3475030$. Or ce dernier logarithme répond à 222,59 pieds; reste donc à soustraire de cette valeur celle de $\frac{bb}{g}$ 0,6931472, pour avoir celle de x.

$$\begin{array}{rcl} L\,\frac{bb}{g} & = & 1,4056027 \\ L\ 0,693\ \&c. & = & 9,8408254 \\ \hline \textit{Somme} & = & 1,2464281 \end{array}$$

qui répond à 17,64 pieds; donc $x = 204,95$ pieds. La différence est ici d'un pied & demi; mais comme deux tierces de plus ou de moins dans la mesure du temps peuvent produire une erreur d'un pied dans de pareilles expériences, on doit regarder la théorie comme étant suffisamment exacte.

IV.

394. Newton rapporte plusieurs autres expériences sur la chûte des corps graves, & une entr'autres qui fut faite dans l'air avec une vessie qui avoit la forme d'un globe, & qui pesoit 99grains $\frac{1}{2}$. Son diametre étoit de 5 pouces, & elle mit $21''\frac{1}{8}$ à descendre du haut de la coupole de la même Eglise, qui a 272 pieds d'élévation.

Commençons à l'ordinaire par réduire ces mesures aux nôtres. Un globe de 0,39111 pieds de diametre, & de 114,24 grains de poids est tombé en $21''\frac{1}{8}$ d'une hauteur de 256 pieds $\frac{1}{5}$. Cherchons ensuite la valeur de x.

Puisque le poids d'un pareil volume d'air est de 23,77

grains, comme nous l'avons déja vu dans l'expérience précédente, il suit que le poids de cette vessie dans le vuide est de 138 grains. On a donc $\frac{D'}{D} = \frac{138}{23,77} \ldots \frac{bb}{g} = \frac{8}{3} \cdot \frac{138}{23,77} \cdot 0,39111 = \frac{368}{23,77} \cdot 0,39111 \ldots g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) 30,196 = \frac{114,23}{138} \cdot 30,196$. Cela posé, le calcul va de suite.

$$
\begin{aligned}
L\,0,39111 &= 9,5922960 \\
L\,368 &= 2,5658478 \\
\textit{Somme} &= 2,1581438 \\
L\,23,77 &= 1,3760292 \\
L\,\frac{bb}{g} &= 0,7821146 \\
L\,0,693\ \&c. &= 9,8408254 \\
\textit{Somme} &= 0,6229400 \text{ qui répond à } 4,197
\end{aligned}
$$

$L\,\frac{bb}{g} = 0,7821146$	$L\,bb = 2,1799710$
$L\,114,23 = 2,0577861$	$L\,b = 1,0899855$
$L\,30,196 = 1,4799494$	$L\,t = 1,3247967$
Somme $= 4,3198501$	$L\,bt = 2,4147822$
$L\,138 = 2,1398791$	Ce log. répond à 259,887.
Reste $= 2,1799710$	$259,887 - 4,197 = 255,69$.

Le mobile devoit donc parcourir 255,69 pieds en $21''\frac{1}{8}$. Or il en parcourut $256\frac{1}{7}$ suivant l'expérience; le résultat de la théorie ne differe donc de celui de l'observation que d'un demi-pied; & on voit bien que la plus petite inexactitude dans l'observation peut avoir occasionné cette différence.

L'espace que ce mobile auroit parcouru en même temps dans le vuide eût été de 6737 pieds, ce qui montre à quelles

erreurs on feroit expofé, fi dans ces fortes de mouvements on négligeoit la réfiftance de l'air.

[395. Cherchons maintenant la trajectoire d'un projectile qui ayant été lancé fuivant une direction quelconque dans un milieu réfiftant, feroit continuellement follicité par la gravité fuivant des directions paralleles. *

Soit a l'angle de projection, h la hauteur dûe à la vîteffe de projection, v la hauteur dûe à la vîteffe du mobile en un point quelconque, $\frac{gv}{k}$ la réfiftance du milieu proportionnelle au quarré de la vîteffe, on aura $\frac{gv}{k} \cdot \frac{dx}{ds}$ pour l'expreffion de la force horizontale retardatrice, & $g + \frac{g}{k} \cdot \frac{vdy}{ds}$ pour la force verticale retardatrice : d'où on tirera les équations fuivantes

$$\frac{gv}{k} \cdot \frac{dx}{ds} dt + d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0 \ldots gdt + \frac{gv}{k} \cdot \frac{dy}{ds} dt + d\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0,$$

qui menent à celle-ci, $dv + dy + \frac{vds}{k} = 0$.

Or $gv = \frac{uu}{2} = \frac{ds^2}{2dt^2}$. Ainfi la premiere équation peut être mife fous cette forme $\frac{ds}{k} + 2d\left(\frac{dx}{dt}\right) : \frac{dx}{dt} = 0$, dont l'intégrale eft $\frac{s}{k} + 2l\frac{dx}{dt} = l2gC$, ou $\frac{dx^2}{dt^2} e^{\frac{s}{k}} = 2gC$, ou $v \cdot \frac{dx^2}{ds^2} = Ce^{\frac{-s}{k}}$.

Soit donc maintenant $dy = pdx$, on aura $ve^{\frac{s}{k}} = C(1+pp) \ldots dve^{\frac{s}{k}} + \frac{vds}{k} e^{\frac{s}{k}} = 2Cpdp \ldots dv + \frac{vds}{k} = e^{\frac{-s}{k}} \cdot 2Cpdp = -dy$ (par la troifieme équation) $= -pdx$;

ou $e^{\frac{s}{k}} dx + 2Cdp = 0$. Multipliant par $\sqrt{(1+pp)} = \frac{ds}{dx}$, il viendra $ds \,.\, e^{\frac{s}{k}} + 2Cdp\sqrt{(1+pp)} = 0$, dont l'intégrale eſt $ke^{\frac{s}{k}} + Cp\sqrt{(1+pp)} + Cl(p+\sqrt{1+pp}) = C'$. Subſtituant $-\frac{2Cdp}{dx}$ à la place de $e^{\frac{s}{k}}$ & ſéparant, on aura

$$\frac{dx}{2k} = \frac{-dp}{\frac{C'}{C} - p\sqrt{(1+pp)} - l(p+\sqrt{1+pp})}.$$

Pour déterminer les conſtantes, reprenons l'équation $v \,.\, \frac{dx^2}{ds^2} = C \,.\, e^{\frac{-s}{k}}$; & nous aurons au point de projection $dx = ds\, cof\, a \ldots s = 0 \ldots v = h$; donc $C = h\, cof^2\, a$. Nous aurons auſſi à ce même point $p = tang\, a$. Donc l'équation $ke^{\frac{s}{k}} + Cp \times \sqrt{1+pp} + Cl\,(p + \sqrt{1+pp}) = C'$, donnera $\frac{C'}{C} = \frac{k}{h\, cof^2\, a} + \frac{fin\, a}{cof^2\, a} + l\left(\frac{1+fin\, a}{cof\, a}\right)$. Ainſi l'équation de la trajectoire deviendra

$$\frac{dx}{2k} = \frac{-dp}{\frac{k}{h\, cof^2\, a} + \frac{fin\, a}{cof^2\, a} + l\left(\frac{1+fin\, a}{cof\, a}\right) - p\sqrt{1+pp} - l(p+\sqrt{1+pp})}$$

expreſſion qu'il n'eſt pas poſſible d'intégrer en général par aucune des méthodes connues.

396. Si le milieu réſiſte peu, comme l'air, k ſera une quantité très-grande, & ſi en même temps la hauteur h dûe à la vîteſſe de projection eſt très-petite, la quantité $\frac{k}{h\, cof^2\, a}$ ſera très-grande; enſorte que ſi on réduit le dénominateur en une ſérie convergente, il en réſultera du moins une inté-

gration approchée. Mais ce n'eſt point là le cas dont il s'agit principalement dans la *Balliſtique*, parce que la vîteſſe des projectiles étant preſque toujours fort grande, h devient comparable à k.

397. Cependant ſi l'angle de projection eſt petit, on obtiendra facilement l'approximation ſuivante. Comme p eſt une quantité aſſez petite, on peut, au lieu d'intégrer exactement l'équation $2C\,dp\sqrt{1+pp} + e^{\frac{s}{k}}\,ds = 0$, réduire $\sqrt{1+pp}$ en une ſérie convergente $1 + \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{8}p^4 + \frac{1}{16}p^6 - \frac{5}{128}p^8$ + &c, ce qui donnera

$$\int dp\sqrt{1+pp} = C'' + p + \frac{1}{6}p^3 - \frac{1}{40}p^5 + \frac{1}{112}p^7 - \&c.$$

Or cette intégrale devant être priſe de maniere qu'elle s'évanouiſſe lorſque $p = tang\,a$, on aura $C'' = -tang\,a - \frac{1}{6}tang^3 a + \frac{1}{40}tang^5 a -$ &c. Donc l'équation de la trajectoire ſera

$$\frac{dx}{k} = \frac{-dp}{\frac{k}{2h\,cof^2 a} + tang\,a - p + \frac{1}{6}(tang^3 a - p^3) - \frac{1}{40}(tang^5 a - p^5)\ \&c.}$$

Et ſi l'angle de projection eſt petit, on pourra négliger les puiſſances ſupérieures de $tang\,a$ & de p, & poſer pour premiere approximation $\frac{dx}{k} = \frac{-dp}{\frac{k}{2h\,cof^2 a} + tang\,a - p}$.

L'intégrale de cette équation eſt $\frac{x}{k} + C = l\left(\frac{k}{2h\,cof^2 a} + tang\,a - p\right)$; & puiſque $tang\,a = p$, lorſque $x = 0$, on a $C = l\frac{k}{2h\,cof^2 a}$, & $\frac{x}{k} = l\left[1 + \frac{2h\,cof^2 a}{k}(tang\,a - p)\right]$, ou $e^{\frac{x}{k}} - 1 = \frac{2h\,cof^2 a}{k}(tang\,a - p)$. Donc $p = tang\,a -$

$\frac{k}{2h\,cof^2 a}\left(e^{\frac{x}{k}}-1\right)=\frac{dy}{dx}$, ou $dy=\left(tang\,a+\frac{k}{2h\,cof^2 a}\right)dx-$ $\frac{k}{2h\,cof^2 a}e^{\frac{x}{k}}dx$, dont l'intégrale eſt $y=\left(tang\,a+\frac{k}{2h\,cof^2 a}\right)x-$ $\frac{k^2}{2h\,cof^2 a}\left(e^{\frac{x}{k}}-1\right)$. C'eſt l'équation de la trajectoire.

Fig. 156. 398. Repréſentons-là par une courbe AMB, & diminuons les ordonnées, de la quantité $NP=CA=\frac{k^2}{2h\,cof^2 a}$, enſorte que le point C ſoit l'origine des abſciſſes, & que la ligne MN ſoit l'ordonnée : nous aurons pour l'équation des coordonnées $CN\,(x)$ & $MN\,(y)$,

$$y=x\left(tang\,a+\frac{k}{2h\,cof^2 a}\right)-\frac{k^2}{2h\,cof^2 a}e^{\frac{x}{k}}.$$

Menons par le point C la droite CQ qui faſſe avec CN un angle ς dont la tangente $=tang\,a+\frac{k}{2h\,cof^2 a}$, on aura $QN=x\left(tang\,a+\frac{k}{2h\,cof^2 a}\right)$, & par conſéquent $QM=\frac{k^2}{2h\,cof^2 a}e^{\frac{x}{k}}$. Or $x=CQ.\,cof\,\varsigma$; donc entre CQ & QM que l'on peut appeller x' & y', on aura l'équation

$$y'=\frac{k^2}{2h\,cof^2 a}e^{\frac{x'cof\,\varsigma}{k}}.$$

D'où il ſuit que la courbe AM eſt une logarithmique qui a pour aſymptote CQ, & dont les ordonnées verticales font avec cette aſymptote un angle dont la cotangente $=tang\,a+\frac{k}{2h\,cof^2 a}$, la ſoutangente de cette courbe étant $\frac{k}{cof\,\varsigma}$.

Le point O le plus élevé ſe trouve en ſuppoſant $p=0$. Alors $tang\,a-\frac{k}{2h\,cof^2 a}\left(e^{\frac{x}{k}}-1\right)=0$, & $x=k\,l\left(1+\frac{h\,fin\,2a}{k}\right)$; donc cette plus grande élévation $OL=(\,k\,tang\,a\,+$

$\frac{k^2}{2h\,cos^2 a}\Big)\, l\Big(1+\frac{h\,sin\,2a}{k}\Big) - k\ tang\ a.$

L'amplitude AB se détermine en supposant $y=0$; car alors $x\ (\ tang\ a + \frac{k}{2h\,cos^2 a}) = \frac{k^2}{2h\,cos^2 a}(e^{\frac{x}{k}} - 1)$; ou $\frac{e^{\frac{x}{k}}-1}{\frac{x}{k}} = 1 + \frac{h\,sin\,2a}{k}$. Mais cette équation ne peut se résoudre que par de fausses positions.

399. Voici maintenant quelques expériences sur lesquelles nous allons essayer la théorie qui précede. Elles ont été faites avec un canon de 24 chargé à 9 lb de poudre.

ANGLES DE PROJECTION.	AMPLITUDES OBSERVÉES.
1° 11′	300 T.
4	820
15	1675
20	1740
25	1825
30	1910
35	2020
40	2050
45	2200

Mais il faut auparavant déterminer la quantité k; or nous avons représenté la résistance par $\frac{gv}{k}$ ou $\frac{uu}{2k}$. Ainsi k est la moitié de ce que nous avons désigné par $\frac{bb}{g}$ (386). On a donc $k = \frac{4}{3}\cdot\frac{D'}{D}a'$, a' étant le diametre du boulet.

Le diametre des boulets de 24 dont il s'agit, est de 5 pouces $\frac{4}{9}$ ou de $\frac{49}{9 . 72}$ toises. La densité de l'air est à celle du fer fondu dont on fait ces boulets : : 1 : 6047. Donc $k = \frac{4}{3} . 6047 . \frac{49}{9 . 72} = 609,677$ toises ; & par conséquent $lk = 2,7850998$.

Déterminons maintenant la quantité h ou la hauteur dûe à la vîtesse de projection. Dans la premiere expérience l'angle de projection est de $1^\circ 11' = a$, l'amplitude observée x est de 300 toises, c'est la portée de *but en blanc*, ainsi nommée parce que dans une piece de 24, la ligne de *mire* fait avec l'axe de la piece un angle de 1° 11'. Cela posé ; toutes les quantités qui entrent dans l'équation fondamentale $\frac{e^{\frac{x}{k}} - 1}{\frac{x}{k}} = 1 + \frac{h \sin 2a}{k}$ se détermineront aisément.

$e^{\frac{x}{k}}$ est le nombre dont le logarithme hyperbolique est $\frac{x}{k}$, ou dont le logarithme ordinaire est $\frac{x}{k} \times 0,4342945 = \frac{300}{609,677} \times 0,4342945 = 0,2137006$. Ce nombre est donc $1,6356883 = e^{\frac{x}{k}}$. Or

$$L\ 0,6356883 = 9,8032442$$
$$L \frac{x}{k} \ldots\ldots = 9,6920215$$
$$Reste \ldots\ldots = 0,1112227$$

c'est le logarithme de $\frac{e^{\frac{x}{k}} - 1}{\frac{x}{k}}$, lequel répond à 1,291882.

Donc

Donc $\frac{h \sin 2a}{k} = 0{,}291882$; & en continuant le calcul, on trouvera

$$L\ 0{,}291882 = 9{,}4652073$$
$$L \sin 2^\circ\ 22' = \underline{8{,}6158910}$$
$$Reste = 0{,}8493163$$

c'eſt le logarithme de $\frac{h}{k}$, celui de k eſt 2,7850998 ; donc $l\,h = 3{,}6344161$; donc $h = 4309$ toiſes.

Un calcul abſolument ſemblable, pour l'expérience faite ſous l'angle de 4°, donnera $h = 4863$ toiſes. Sous l'angle de 15°, il donne $h = 5261$. Le milieu entre ces trois réſultats eſt $h = 4811$. On peut donc ſuppoſer que la hauteur dûe à la vîteſſe de projection étoit de 4811 toiſes dans ces diverſes épreuves, & que par conſéquent la force de la poudre donnoit au boulet une vîteſſe de 1320 pieds ou de 220 toiſes par ſeconde. Cette valeur étant ainſi déterminée, calculons les amplitudes que la théorie donne pour les différentes inclinaiſons marquées dans la Table précédente, & voyons ſi elles s'accordent avec les portées obſervées.

I.

Pour la portée de but en blanc, ſous l'angle de projection 1° 11', l'équation à réſoudre eſt $\frac{e^{\frac{x}{k}} - 1}{\frac{x}{k}} = 1 + \frac{h}{k} \sin 2^\circ\ 22'$.

$$\begin{array}{rcl} L\,4811 & = & 3{,}6831371 \\ L\,k & = & 2{,}7850998 \\ \hline L\,\frac{h}{k} & = & 0{,}8980373 \\ L\,\sin 2^\circ\,22' & = & 8{,}6158910 \\ \hline Somme & = & 9{,}5139283 \end{array}$$

ce logarithme répond à 0,32653 ; donc $\frac{e^{\frac{x}{k}} - 1}{\frac{x}{k}} = 1{,}32653$.

Soit $\frac{x}{k} = 0{,}5$, on aura $\frac{e^{\frac{x}{k}} - 1}{\frac{x}{k}} = 1{,}298$. L'erreur eſt 28 en moins. Soit $\frac{x}{k} = 0{,}51$; on aura $e^{\frac{x}{k}} = 1{,}665 \ldots \frac{e^{\frac{x}{k}} - 1}{\frac{x}{k}} =$ 1,304. L'erreur eſt 22 en moins. Ainſi on dira, la différence des erreurs 6 eſt à la plus petite erreur 22, comme la différence 0,01 des ſuppoſitions eſt à un quatrieme terme 0,036. Donc $\frac{x}{k} = 0{,}546$.

Soit $\frac{x}{k} = 0{,}55$; on aura $e^{\frac{x}{k}} = 1{,}733253 \ldots . \frac{e^{\frac{x}{k}} - 1}{\frac{x}{k}} =$ 1,3332. L'erreur eſt 67 en plus ; & en faiſant $\frac{x}{k} = 0{,}545$ on trouvera $e^{\frac{x}{k}} = 1{,}724608 \ldots \frac{e^{\frac{x}{k}} - 1}{\frac{x}{k}} = 1{,}3295$. L'erreur eſt 30 en plus ; ainſi on aura la proportion ſuivante 37 : 30 : : 0,005 : 0,004, ce qui donne $\frac{x}{k} = 0{,}541$; & comme cette valeur eſt aſſez exacte, on aura pour l'amplitude cherchée $0{,}541 \,.\, k = 330$ toiſes.

II.

Pour la portée sous 4°, l'équation est $\frac{e^{\frac{x}{k}} - 1}{\frac{x}{k}} = 1 + h\, \mathit{sin}\, 8°$, & pour abréger nous la mettrons sous cette forme $y = 1 + h\, \mathit{sin}\, 8°$; cela posé,

$$L\frac{h}{k} \ldots = 0{,}8980373$$
$$L\, \mathit{sin}\, 8° = 9{,}1435553$$
$$\mathit{Somme} = 0{,}0415926$$

logarithme qui répond à 1,1005 ; donc $y = 2{,}1005$. Soit $\frac{x}{k} = \frac{4}{3}$; on aura $e^{\frac{x}{k}} = 3{,}7936 \ldots$ $y = 2{,}0952$; ainsi l'erreur sera 53 en moins. Soit $\frac{x}{k} = 1{,}35$; on aura $e^{\frac{x}{k}} = 3{,}8574 \ldots$ $y = 2{,}1166$: ce qui donnera 161 pour l'erreur en plus. On dira donc $2,4 : 53 :: \frac{1}{60} : 0{,}004128$. Donc $\frac{x}{k} = \frac{4}{3} + 0{,}004128 = 1{,}3375 \ldots x = 815$ toises.

III.

Pour la portée sous 15°, l'équation est $y = 1 + \frac{h}{k}\, \mathit{sin}\, 30°$, $= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{k} = 4{,}9537$. Soit $\frac{x}{k} = 2{,}5$; on aura $e^{\frac{x}{k}} = 12{,}18 \ldots$ $y = 4{,}472$. L'erreur est 482 en moins. Soit $\frac{x}{k} = 2{,}6$; on aura $e^{\frac{x}{k}} = 13{,}464 \ldots \ldots y = 4{,}794$. L'erreur est 160 en moins. On aura donc la proportion $322 : 160 :: 0{,}1 : 0{,}05$; ce qui donnera $\frac{x}{k} = 2{,}65$.

Soit $\frac{x}{k} = 2{,}65$; on aura $e^{\frac{x}{k}} = 14{,}15404 \ldots y = 4{,}9638$.

L'erreur eſt 101 en plus. Soit $\frac{x}{k} = 2,64$; on aura $e^{\frac{x}{k}} = 14,01320 \ldots y = 4,9292$. L'erreur eſt 245 en moins. Ainſi $346 : 245 :: 0,01 : 0,007$; d'où on tirera $\frac{x}{k} = 2,647 \ldots x = 1614$ toiſes.

IV.

Pour la portée ſous 20°, l'équation eſt $y = 1 + \frac{h}{k} \sin 40°$. On aura donc

$$L\frac{h}{k} \ldots = 0,8980373$$
$$L \sin 40° = 9,8080675$$
$$\text{Somme} = 0,7061048$$

logarithme de 5,0828. Donc $y = 6,0828$. Soit $\frac{x}{k} = 3$; on aura $e^{\frac{x}{k}} = 20,086 \ldots y = 6,36$. L'erreur eſt 28 en plus. Soit $\frac{x}{k} = 2,9$; on aura $e^{\frac{x}{k}} = 18,175 \ldots y = 5,92$. L'erreur eſt 16 en moins. Ainſi on dira $44 : 16 :: 0,1 : 0,037$; ce qui donne $\frac{x}{k} = 2,937 \ldots x = 1791$ toiſes.

V.

Pour la portée ſous 25°, l'équation eſt $y = 1 + \frac{h}{k} \sin 50°$.

$$L\frac{h}{k} \ldots = 0,8980373$$
$$L \sin 50° = 9,8842540$$
$$\text{Somme} = 0,7822913$$

logarithme de 6,05747. Donc $y = 7,05747$. Soit $\frac{x}{k} = 3,1$; on aura $e^{\frac{x}{k}} = 22,198 \ldots y = 6,839$. L'erreur eſt 218 en moins. Soit $\frac{x}{k} = 3,2$; on aura $e^{\frac{x}{k}} = 24,533 \ldots y = 7,354$.

L'erreur eſt 297 en plus. La proportion 515 : 218 :: 0,1 : 0,0423 donnera $\frac{x}{k} = 3,1423 \ldots x = 1916$ toiſes.

VI.

Pour la portée ſous 30°, on aura par un calcul tout-à-fait ſemblable

$$\begin{array}{lcl} L\frac{h}{k}\ldots & = & 0,8980373 \\ L\,fin\,60° & = & \underline{9,9375306} \\ Somme & = & 0,8355679 \end{array}$$

logarithme de 6,8481. Donc $y = 7,8481$. Soit $\frac{x}{k} = 3,3$; on aura $e^{\frac{x}{k}} = 27,11 \ldots y = 7,91$. L'erreur eſt 7 en plus. Soit $\frac{x}{k} = 3,25$; on aura $e^{\frac{x}{k}} = 25,79 \ldots y = 7,63$. L'erreur eſt 22 en moins ; & la proportion 29 : 22 :: 0,05 : 0,038 donnera $\frac{x}{k} = 3,288 \ldots x = 2005$ toiſes.

VII.

Pour la portée ſous 35°, on aura de même

$$\begin{array}{lcl} L\frac{h}{k}\ldots & = & 0,8980373 \\ L\,fin\,70° & = & \underline{9,9729858} \\ Somme & = & 0,8710231 \end{array}$$

logarithme de 7,4306. Donc $y = 8,4306$. Soit $\frac{x}{k} = 3,4$; on aura $e^{\frac{x}{k}} = 29,964 \ldots y = 8,519$. L'erreur eſt 88 en plus. Soit $\frac{x}{k} = 3,39$; on aura $e^{\frac{x}{k}} = 29,666 \ldots y = 8,456$. L'erreur eſt 25 en plus. On aura donc 63 : 25 :: 0,01 : 0,004 ; & retranchant ce dernier terme de 3,39, on

trouvera que $\frac{x}{k} = 3,386 \ldots\ldots x = 2064$ toises.

VIII.

Sous 40°	$L\,\frac{h}{k}$	=	0,8980373
	$L\ \mathit{sin}\ 80°$	=	9,9933515
	Somme	=	0,8913888

logarithme de 7,7873. Donc $y = 8,7873$. Soit $\frac{x}{k} = 3,45$; on aura $e^{\frac{x}{k}} = 31,5004 \ldots y = 8,841$. L'erreur est 54 en plus. Soit $\frac{x}{k} = 3,44$; on aura $e^{\frac{x}{k}} = 31,187 \ldots y = 8,775$. L'erreur est 12 en moins. Ainsi la proportion 66 : 12 : : 0,01 : 0,0018 donnera $\frac{x}{k} = 3,4418 \ldots x = 2098$ toises.

IX.

Sous 45° on a $\frac{h}{k} = 7,9075$. Donc $y = 8,9075$; & si on suppose $\frac{x}{k} = 3,45$, on trouvera $y = 8,841$. L'erreur est 66 en moins. Soit $\frac{x}{k} = 3,46$; on aura $y = 8,9066$. Ce nombre est assez exact, & on en déduit 2110 toises pour la valeur de x.

Mais afin que l'on puisse comparer plus facilement les résultats de l'expérience avec ceux de la théorie, nous joignons ici la Table suivante.

ANGLES DE PROJECTION.	PORTÉES OBSERVÉES.	PORTÉES CALCULÉES.	DIFFÉR.
1°. 11′	300ᵗ	330	+ 30
4	820	815	— 5
15	1675	1614	— 61
20	1740	1791	+ 51
25	1825	1916	+ 91
30	1910	2005	+ 95
35	2020	2064	+ 44
40	2050	2098	+ 48
45	2200	2110	— 90

Elle a été calculée pour la ſuppoſition que la force de la poudre imprimoit aux boulets une vîteſſe dûe à une hauteur de 4811 toiſes, ce qui eſt le milieu déduit des trois premieres obſervations. La piece étoit de 24, & la charge de poudre étoit de 9 ℔, comme nous l'avons déja dit.

Or en comparant les portées obſervées avec celles que donne la théorie approchée dont nous nous ſommes ſervis, il eſt aiſé de voir qu'elles s'accordent ſuffiſamment, d'autant plus que ces ſortes d'expériences ne peuvent gueres être faites avec toute l'exactitude dont on auroit beſoin pour vérifier une théorie. Quelques ſoins que l'on prenne pour rendre tout égal dans ces épreuves, il arrive ſouvent que ſous le même angle & avec la même charge, les portées different de 50 & même de 100 toiſes. La plus grande différence que nous avons trouvée eſt de 95 toiſes

qui font à-peu-près la vingtieme partie de la portée : encore l'erreur paroît-elle venir ici de l'expérience. Quand bien même en effet l'angle de la plus grande portée feroit de 45°, ce qui eft tout au moins douteux, la différence des portées que donnent 45 & 40°, devroit être moindre que la différence de celles qui répondent à 40 & à 35°, comme on le fait par la nature des *Maxima*. Ainfi la portée fous 45° devroit être moindre que 2080, au lieu que l'expérience * la donne de 2200 toifes.]

SECTION II.

Du Mouvement d'un Corps sur une Ligne donnée.

400. Nous fuppoferons 1° que le mobile eft un point phyfique d'un volume infiniment petit. 2°, Que la ligne fur laquelle il fe meut, ne lui permet point de s'écarter d'aucun côté, comme le feroit par exemple un canal dont le diametre feroit égal à celui du corps. 3°, Qu'au-dedans de ce canal, le corps peut fe mouvoir librement, fans éprouver le moindre frottement de la part de fes parois.

401. Un tel canal ne pourra donc détruire que les mouvements qui lui font perpendiculaires, & par conféquent la réfiftance provenant de cette caufe s'exercera toute

toute ſuivant la perpendiculaire à la ligne décrite, de maniere qu'il n'en réſultera aucune force tangentielle pour altérer la vîteſſe du mobile. Donc ſi le corps ſe meut en vertu d'une impulſion primitive, & ſi ſon mouvement n'eſt troublé par aucune force accélératrice, quelle que ſoit la courbe ſur laquelle il ſera obligé de ſe mouvoir, il aura par-tout la même vîteſſe, & décrira par conſéquent des arcs égaux de cette courbe en temps égaux.

402. Mais ſans avoir recours à un canal exempt de frottement, on peut faire mouvoir un corps dans toute ligne donnée, en ſuivant le procédé du célebre Huyghens. Soit *AM* la ligne dont il s'agit, *BN* ſa développée, *MN* le rayon oſculateur au point *M*. On prendra un fil inextenſible *MNC* que l'on attachera par un bout au point *C* de la développée, de façon qu'il puiſſe s'appliquer ſur la lame *CNB*. On l'attachera par l'autre bout au mobile, qui dans ſon mouvement ſera forcé de décrire la courbe donnée *AM*. Fig. 157.

Or un mobile ne peut être ainſi contraint dans ſa direction, ſans qu'il n'en réſulte une preſſion continuelle ſur la ligne de ſon mouvement, ou ce qui eſt la même choſe, ſans que le fil de la développée n'éprouve une certaine tenſion. Donc ſi on appliquoit en ſens contraire une force égale à cette preſſion, le mobile décriroit bien la même courbe, mais alors ſon mouvement ſeroit libre.

Suppoſons qu'il ne ſe meut ſur la courbe *AM* qu'en vertu de quelque impulſion primitive, ſans être trou-

blé par aucune puiſſance, & appellons F la force de preſſion qu'il exerce ſur la courbe AM ſuivant la perpendiculaire NM. Si cette force conſidérée comme force accélératrice étoit imprimée au mobile, dans la direction oppoſée MN, la trajectoire AM ſeroit décrite d'un mouvement libre. Or F étant la force normale, a pour valeur (280) le quarré de la vîteſſe uu diviſé par le rayon oſculateur MN.

C'eſt donc auſſi la valeur de la preſſion ſur la courbe, ou de la tenſion du fil, nommée communément *Force centrifuge.* Cette dénomination vient de ce que le mobile tendant par ſon inertie à ſe mouvoir uniformément & en ligne droite, ne peut être contraint à décrire une ligne courbe, ſans faire un effort continuel pour s'échapper par la tangente, & s'éloigner du centre de ſon mouvement.

403. La force centrifuge eſt donc égale au quarré de la vîteſſe diviſé par le rayon oſculateur. Elle eſt à la force de la gravité comme la hauteur dûe à la vîteſſe du mobile eſt à la moitié du rayon oſculateur. Il ne faut pas croire pourtant que la force centrifuge dépende de la gravité ; car le mobile preſſeroit encore la ligne ſur laquelle il ſe meut, quand bien même la gravité n'exiſteroit pas.

404. Quelles que ſoient d'ailleurs les forces qui ſollicitent un corps dans ſa trajectoire, on pourra les réduire à deux, l'une tangentielle T, l'autre normale N. La premiere altérera ſa vîteſſe, & on aura $g\,dv = T\,ds$; la ſeconde produira la preſſion ſur la courbe décrite, & lorſqu'elle agira dans le même ſens que la force centrifuge $\frac{uu}{R}$, la

pression totale sera $\frac{uu}{R} + N$: mais si elle agit en sens contraire, la pression ne sera plus exprimée que par $\frac{uu}{R} - N$.

Dans ce dernier cas, la pression deviendra nulle lorsque N sera égale à $\frac{uu}{R}$, & par conséquent le mobile décrira librement la ligne donnée. Aussi est-ce là l'équation que l'on a pour les mouvements libres.

405. Au moyen de la formule $g\,d\,v = T\,d\,s$, & de l'équation connue de la courbe, on trouvera la vîtesse du mobile en un point quelconque. Le temps se déterminera en intégrant $\frac{ds}{u}$; & la pression sur la trajectoire sera exprimée par $\frac{uu}{R} \pm N$. Mais ce dernier élément n'est pas nécessaire pour connoître le mouvement.

406. Soit BM la ligne donnée, AP son axe, X & Y les deux forces accélératrices dirigées, l'une suivant MN parallélement à AP, l'autre suivant PM. Soit P la pression totale sur la courbe suivant la perpendiculaire OM. Si on applique cette force en sens contraire suivant MO, le mouvement deviendra libre. Décomposant donc la force P suivant MO en deux, la premiere dans le sens de MN, la seconde dans le sens de MQ, on aura $\frac{Pdy}{ds}$ pour l'une, & $\frac{Pdx}{ds}$ pour l'autre. D'où on tirera, FIG. 158.

$$\left(X + \frac{Pdy}{ds}\right) dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right) \ldots \left(Y - \frac{Pdx}{ds}\right) dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Substituant $\frac{ds}{u}$ au lieu de dt, on aura

$$Xds + Pdy = u\,d\left(\frac{udx}{ds}\right) = uu\,d\left(\frac{dx}{ds}\right) + u\,du\,.\,\frac{dx}{ds},$$

$$Yds - Pdx = uu\,d\left(\frac{dy}{ds}\right) + u\,du\,.\,\frac{dy}{ds}.$$

Multipliant la premiere par dx & la seconde par dy, & ajoutant les produits, on trouvera $(Xdx + Ydy)\,ds = uuds\left[\frac{dx}{ds}\cdot d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dy}{ds}\cdot d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right] + ududs$, ou $udu = Xdx + Ydy$ qui revient à l'équation $gdv = Tds$.

Pareillement si après avoir multiplié la premiere par dy, la seconde par dx, on retranche les produits, l'un de l'autre, on aura $(Xdy - Ydx)\,ds + Pds^2 = u^2ds \ldots\ldots \left[\frac{dy}{ds}d\left(\frac{dx}{ds}\right) - \frac{dx}{ds}d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right] = -\frac{u^2dx^2}{ds}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Or le rayon osculateur $R = \frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$. Donc $P = \frac{u^2}{R} + \frac{Ydx - Xdy}{ds}$; équation qui fait voir que quand même il n'y auroit aucune puissance accélératrice, la pression sur la courbe n'en seroit pas moins exprimée par $\frac{u^2}{R}$. Elle fait voir aussi que dans le cas où il y a de ces puissances, la pression sur la courbe par la force centrifuge, est augmentée de la force normale, lorsque sa direction est la même que celle de la force centrifuge, & qu'elle est diminuée de cette même force lorsque sa direction est opposée. C'est précisément ce que nous avons trouvé en considérant le mouvement d'une autre maniere.

Voilà en peu de mots la méthode générale de calculer le mouvement d'un corps sur une ligne donnée. Nous allons l'appliquer à quelques cas particuliers.

Applications de la Théorie précédente.

407. Supposons qu'un mobile soit suspendu par un fil attaché à un point fixe. Si on frappe ce mobile

ſuivant une direction quelconque, il décrira néceſſairement une circonférence de cercle autour de ce point, & il la décrira uniformément, ſi on ſuppoſe qu'aucune puiſſance ne trouble le mouvement imprimé. Soit V ſa vîteſſe, qui ſe trouve en décompoſant la vîteſſe imprimée en deux autres, l'une V perpendiculaire au rayon, l'autre ſuivant ce rayon. Soit F la tenſion du fil, ou la force centrifuge, ſoit R le rayon du cercle. On aura donc $F = \frac{V^2}{R}$, ou plutôt $F = \frac{MV^2}{R}$, ſi M eſt la maſſe du mobile, parce que $\frac{V^2}{R}$ n'eſt qu'une force accélératrice, dont l'effet eſt la vîteſſe que peut imprimer la force centrifuge.

Pour connoître donc l'intenſité véritable de cette puiſſance, il faut multiplier $\frac{V^2}{R}$ par la maſſe du corps. Ainſi *la force centrifuge eſt au poids du corps comme la hauteur dûe à la vîteſſe eſt à la moitié du rayon.* Si on ſuppoſe, par exemple, la vîteſſe du mobile dûe à une hauteur de 40 pieds, & le rayon du cercle de 10 pieds, la force centrifuge ou la tenſion du fil ſera au poids du corps, comme 8 eſt à l'unité.

408. Soit T le temps périodique du mobile, on aura $V = \frac{2cR}{T}$, & la force centrifuge $F = \frac{M.4c^2R}{T^2}$. *La force centrifuge eſt donc proportionnelle au rayon du cercle directement, & au quarré du temps périodique réciproquement.*

409. Comme la Terre a un mouvement de rotation autour de ſon axe, toutes ſes parties ſont animées d'un certain degré de force centrifuge, lequel eſt plus ou moins grand ſelon qu'elles ſont plus ou moins éloignées de l'axe :

& comme ſous l'équateur cette force eſt directement oppoſée à celle de la peſanteur, elle doit la diminuer davantage. Quant aux lieux intermédiaires entre les poles & l'équateur, la diminution de la peſanteur doit être moins ſenſible à meſure qu'ils ſont plus près des poles.

Il ſuit delà que ſi la terre a été fluide dans l'origine; elle n'a pû conſerver en vertu de ſon mouvement de rotation, la forme ſphérique que l'uniformité de la peſanteur tendoit à lui donner. Car les parties plus proches de l'équateur peſant moins que les autres, il en a fallu davantage pour ſervir de contre-poids. Il a donc fallu que cette maſſe de fluide prît la figure d'une eſpece d'ellipſoïde applati vers les poles, & renflé vers l'équateur, tel à peu-près qu'il ſeroit engendré par la révolution d'une ellipſe autour de ſon petit axe. C'eſt auſſi le réſultat que donnent les plus exactes meſures des degrés du méridien, faites dans ces derniers temps. Elles s'accordent toutes à conſtater l'applatiſſement du globe terreſtre vers les poles; & celles qui paſſent pour les meilleures prouvent que ſon axe eſt de $\frac{1}{215}$ moindre que le diametre de l'équateur.

Fig. 159. 410. Examinons maintenant le mouvement d'un corps qui deſcendroit par ſa gravité le long d'une ligne droite AC inclinée à l'horizon. Soit A l'origine du mouvement; ſoit AM l'eſpace x parcouru pendant le temps t; ſoit u la vîteſſe en M. Si on mene par le point A la verticale AB, & par le point C l'horizontale BC, on pourra, en appellant a l'inclinaiſon ACB de AC ſur l'horizon, décompoſer la

force de la gravité g suivant MP en deux autres forces, l'une $g\,fin\,a$ suivant MC, l'autre $g\,cof\,a$ perpendiculaire à MC. Celle-ci donnera la preffion fur le plan incliné, puifque la force centrifuge eft nulle : or cette preffion eft au poids du corps :: $cof\,a : 1$. L'autre accélérera continuellement le mouvement fuivant AM. Le corps defcendra donc, comme s'il étoit follicité par une force de gravité $g\,fin\,a$ fuivant AM, & fon mouvement fera uniformément accéléré. On aura donc les équations fuivantes,

$$u = gt\,fin\,a \ldots x = \tfrac{1}{2} g.t^2\,fin\,a,$$

D'où on peut déduire plufieurs remarques utiles.

1°. Le temps employé à parcourir AC eft $\sqrt{\frac{2AC}{g\,fin\,a}} = \sqrt{\frac{2AC^2}{gAB}}$; il eft donc comme la longueur AC, lorfque AB eft une quantité conftante ; c'eft-à-dire, que les temps employés à defcendre du point A jufqu'à l'horizontale BC font comme les longueurs des lignes parcourues. FIG. 159.

2°. Si on décrit un cercle dont le diametre AB foit vertical, le mobile partant de A pour defcendre vers M par la corde AM employera toujours le même temps qu'il eut employé à defcendre en B par le diametre AB, puifque dans le cercle la quantité $\frac{AM^2}{AP}$ eft conftante. FIG. 160.

3°. La vîteffe du mobile arrivant au point C aura pour expreffion $\sqrt{2g\,fin\,a\,AC} = \sqrt{2gAB}$: elle fera donc égale à celle que le corps eût acquife en tombant par la verticale AB; d'où il fuit que la vîteffe acquife par la chûte d'un mobile entre deux plans horizontaux eft toujours la même, FIG. 159.

ſoit qu'il tombe librement par la verticale, ſoit qu'il deſcende par un plan incliné, ou même par un arc de courbe, comme on va le voir dans l'Article ſuivant.

Du mouvement d'Oſcillation.

Fig. 161. 411. Soit ACA' une courbe quelconque le long de laquelle un corps deſcend en vertu de ſa peſanteur, à commencer du point A. Si on rapporte la courbe à un axe quelconque vertical BC, menant les horizontales AB, MP, & faiſant $BP = x$, $PM = y$; la force de la gravité g ſuivant MG étant parallele à BP, on aura (406) $X = g$ & $Y = 0$. Donc $dv = dx$, & $v = x + a$, dans le le cas où le mobile auroit en A quelque vîteſſe initiale dûe à la hauteur a. Le corps en deſcendant par l'arc AM d'une horizontale AB à une autre horizontale MP, a donc préciſément la même vîteſſe que s'il étoit tombé d'une ligne à l'autre par la verticale BP.

Suppoſons qu'il deſcende du repos en A, la vîteſſe en M ſera dûe à la hauteur BP, & la vîteſſe en C à la hauteur BC. Mais ſi C eſt le point le plus bas de la courbe; & ſi la branche $CM'A'$ en eſt une continuation quelconque, la vîteſſe en M' ſera toujours dûe à la hauteur BP', & la vîteſſe en A' à la hauteur o. Le mobile doit donc remonter juſqu'en A', à la même hauteur d'où il étoit deſcendu. Quand il ſera parvenu au point A', il en deſcendra par le même chemin, & remontera par la premiere branche juſqu'à l'origine de ſon mouvement. Il ira donc alternativement

ment de A en A' & de A' en A, jufqu'à ce que des obftacles étrangers s'oppofent à fa marche. C'eft ce mouvement alternatif que l'on appelle *le mouvement d'ofcillation.*

412. Pour connoître la durée d'une ofcillation entiere, ou ce qui revient au même, pour mefurer le temps de la defcente AMC & de la montée $CM'A'$, il faut intégrer $\frac{ds}{\sqrt{2gv}}$, ou $\frac{ds}{\sqrt{2gx}}$ depuis A jufqu'en A'.

EXEMPLE.

413. Soit AMD un arc de cercle décrit du centre C & du rayon $CA = a$; menons la verticale CD, & fuppofons que A eft le point où la defcente commence dans l'arc AMD. Si on fait $DP = x$, $BD = b$, on aura $y = \sqrt{2ax - xx} \ldots$ $ds = \frac{-adx}{\sqrt{2ax-xx}} \ldots\ldots u = \sqrt{2g(b-x)}$. Donc $dt =$ $\frac{-adx}{\sqrt{(2ax-xx)2g(b-x)}} = \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} \cdot \frac{a}{\sqrt{(2a-x)2g}} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{g}} \ldots$ $\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2a} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^2}{4a^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^3}{8a^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^4}{16a^4} + \&c\right]$.

Pour avoir le temps de la defcente entiere, il faut intégrer chaque terme de cette férie, de maniere qu'il s'évanouiffe lorfque $x = b$, & il faut enfuite fuppofer $x = 0$. Or le calcul intégral donne généralement

$$\int \frac{-x^m dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{(bx-xx)}}{m} + \frac{b(2m-1)}{2m} \int \frac{-x^{m-1} dx}{\sqrt{(bx-xx)}};$$

donc fi on prend chacune de ces intégrales entre les deux

Tt

limites $x = b \ldots\ldots x = 0$, comme nous venons de le dire ; on aura $\int \frac{-x^m dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \frac{b(2m-1)}{2m} \int \frac{-x^{m-1} dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$; formule qui donnera les applications suivantes

$$\int \frac{-x dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \frac{b}{2} \int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} \ldots \int \frac{-x^2 dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \frac{3b}{4} \int \frac{-x dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$$

$$\int \frac{-x^3 dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \frac{5b}{6} \int \frac{-x^2 dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \frac{1.3.5}{2.4.6} b^3 \int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}}; \text{ \&c.}$$

D'où il ſuit que le temps de la deſcente dans l'arc AMD eſt généralement exprimé par $t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{g}} \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\left[1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{b}{2a} + \frac{1.3^2}{2^2.4^2} \cdot \frac{b^2}{4a^2} + \frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \cdot \frac{b^3}{8a^3} + \frac{1.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2} \cdot \frac{b^4}{16a^4} + \text{\&c}\right].$$

$\int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$. Or $\int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \text{Arc } cof \frac{2x-b}{b}$; & cette intégrale eſt nulle lorſque $x = b$, au lieu qu'elle a pour valeur le nombre connu c ou $\pi = 3,141$ &c, lorſque $x = 0$. On aura donc pour le temps de la deſcente ſeulement

$$\frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \left[1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{b}{2a} + \frac{1.3^2}{2^2.4^2} \cdot \frac{b^2}{4a^2} + \frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \cdot \frac{b^3}{8a^3} + \text{\&c}\right],$$

& par conſéquent ſi on nomme T la durée d'une oſcillation entiere dans l'arc ADA' on aura

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{b}{2a} + \frac{1.3^2}{2^2.4^2} \cdot \frac{b^2}{4a^2} + \frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \cdot \frac{b^3}{8a^3} + \text{\&c}\right].$$

Or ſi l'arc AMD eſt petit par rapport au rayon, le ſinus verſe b de cet arc ſera auſſi petit relativement à cet arc, que celui-ci l'eſt par rapport au rayon. On pourra donc alors négliger tous les termes de la ſérie, qui contiennent b, & prendre $T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$. Et ſi on veut apprécier l'erreur

qui en résulte, pour des arcs même assez considérables, il n'y a qu'à supposer $AMD = 30°$, par exemple; on trouvera que $\frac{b}{a} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,134$. D'où il est facile de conclure que la durée d'une oscillation entiere, telle que la formule $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ la donne, ne differe de la durée réelle, que de sa soixantieme partie environ; de maniere que s'il faut une seconde pour chaque oscillation, l'erreur n'est que d'une tierce.

414. On voit donc qu'en prenant de très-petits arcs l'erreur doit être insensible, même après un très-grand nombre d'oscillations. Au reste, la formule $T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ étant indépendante de b, il est clair que les oscillations d'un corps dans de petits arcs de cercle doivent être d'une égale durée. Aussi les appelle-t-on dans ce cas, des oscillations *isochrones*.

Comme il est absolument égal de supposer qu'un corps M se meut sur un arc de cercle solide AMD, ou qu'il oscille à l'extrémité d'un fil de suspension CM, on doit en conclure qu'*un pendule* (car c'est le nom que l'on donne alors au mobile) *qui fait de fort petites oscillations, les fait toutes dans le même temps.*

415. Or l'expression de ce temps est $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$; la longueur du pendule étant désignée par a. D'où il suit que *la durée d'une oscillation est directement proportionnelle à la racine quarrée de la longueur du pendule, & réciproquement à la racine quarrée de la force de la gravité.* Un pendule dont la longueur est quadruple de celle d'une autre doit donc faire des oscillations deux fois plus lentes.

416. Soit N le nombre d'oſcillations faites pendant un certain temps t, on aura $T = \frac{t}{N} = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$; & par conſéquent $a = \frac{t^2 g}{N^2 \pi^2}$. Donc *les longueurs de deux pendules ſont réciproquement comme les quarrés des nombres d'oſcillations faites pendant un temps donné.*

417. On a déduit delà un moyen fort ſimple de déterminer par expérience la longueur du pendule qui feroit une vibration par ſeconde.

Suſpendez un corps bien denſe à un fil de métal très-délié ; donnez à ce fil trois pieds de longueur environ, parce que c'eſt à peu-près la longueur cherchée ; écartez tant ſoit peu le pendule de la verticale, pour le faire oſciller, & comptez enſuite bien exactement le nombre d'oſcillations qu'il fera dans un temps déterminé quelconque, dans une heure par exemple. Vous appellerez ce pendule, *le Pendule d'obſervation*, & vous ferez la proportion ſuivante.

Le quarré du nombre des oſcillations comptées eſt à 3600, quarré du nombre d'oſcillations que feroit dans le même temps le pendule à ſecondes, comme la longueur cherchée de ce pendule eſt à la longueur du pendule d'obſervation.

Cette méthode a fait connoître que ſous la latitude de Paris, la longueur du pendule à ſecondes eſt de 3 pieds 8 lignes $\frac{17}{100}$. Mais comme ces expériences ſe font avec des corps d'un volume fini, il faut avoir ſoin de meſurer très-exactement les longueurs des pendules que l'on emploie, en les prenant depuis le point de ſuſpenſion, juſqu'à un autre

point, nommé *le Centre d'oscillation*, dont nous parlerons dans la troisieme Section.

418. Quand on connoît une fois la longueur du pendule qui bat les secondes, on peut en inférer aisément celle d'un autre pendule qui feroit ses vibrations en plus ou moins de temps. Celle, par exemple, du pendule qui battroit les demi-secondes à Paris, doit être évidemment le quart de celle du pendule à secondes : elle doit donc avoir 9 pouces 2 lignes $\frac{14}{100}$. Pour battre les minutes il faudroit un pendule long de 3600 fois 3 pieds 8 lignes, 57, ce qui feroit 11014 pieds $\frac{1}{4}$ de longueur.

C'est là-dessus qu'est fondée la maniere de régler les pendules ordinaires. Quand elles retardent, on remonte la lentille ; on la baisse au contraire quand elles avancent ; mais pour déterminer la quantité dont il faut la hausser ou la descendre, soit a la longueur actuelle du pendule ; soit x la quantité dont elle doit être augmentée ou diminuée ; soit c le nombre de vibrations dont la pendule retarde ou avance dans un temps donné, dans une heure par exemple : b représentera le nombre de vibrations qu'elle doit faire dans le même temps quand elle est bien réglée. Cela posé on aura (416)

$$a : a \pm x :: b^2 : (b \pm c)^2 \text{; donc } x = (2b \pm c)\frac{ac}{b^2}.$$

419. Mais l'usage que l'on a fait de cette théorie pour déterminer avec la derniere exactitude, la force de la gravité g, est bien plus important ; outre que l'idée en est fort ingénieuse, le calcul en est singuliérement aisé. Car on a

$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$, donc si on prend pour T l'unité, & pour a la longueur du pendule à secondes, qui est de 440,57 lignes, on trouvera que $g = \pi^2 . 440,57$ lignes $=$ 30,196 pieds, comme nous l'avons déja dit ; & on en conclura que l'*espace parcouru par un poids quelconque, pendant la premiere seconde de sa chûte, est de* 15 *pieds*,098.

. 420. Si la force de la gravité diminue à mesure que l'on approche de l'équateur, la longueur du pendule à secondes doit varier sous les différentes latitudes : car l'équation $T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$ fait voir que la longueur du pendule restant la même, ses vibrations doivent se rallentir à mesure que g diminue. Or M. Richer étant allé à Cayenne en 1672, pour y faire quelques observations, s'apperçut que la pendule à secondes qu'il y avoit apportée de Paris retardoit sensiblement, au point qu'il fut obligé d'en remonter la lentille d'une ligne $\frac{1}{4}$, pour lui faire battre de nouveau les secondes. Cayenne est à 4° 56′ de latitude boréale.

Depuis M. Richer, on a vérifié plusieurs fois & en divers lieux le fait qu'il avoit attesté ; & on a trouvé qu'à Quito, par exemple, qui est à 25′ seulement par-delà l'équateur, la longueur du pendule à secondes étoit de 438, 83 lignes. A Porto-Belo, par 9°. 33′ de latit. boréale, elle est de 439,12 ; au petit Goave dans l'Isle de S. Domingue, 18°. 27′ de latitude, elle est de 439, 33. Au Caire, 30°. 2′ de lat. . . . . . 440,25. A Rome, 41°.44′ . . . . . 440, 28. A Londres, 51°.31′ . . . . . 440, 65. A Archangel, 64°. 35′, 441,13.

A Pello, 66°. 48′ .... 441,17. Tous ces résultats & bien d'autres s'accordent donc à prouver la diminution de la pesanteur, à mesure que l'on s'éloigne des poles; & de cette diminution on conclud l'existence de la force centrifuge, laquelle à son tour entraîne l'applatissement de la terre vers les poles, dans l'hypothese qu'elle ait été fluide dans l'origine.

421. Le temps que le mobile met à descendre par la corde *AD* est égal au temps qu'il mettroit à tomber par le diametre vertical, & ce temps est exprimé par la formule $\sqrt{\frac{4a}{g}}$ ou $2\sqrt{\frac{a}{g}}$. Mais celui que le même corps emploie à descendre par le petit arc *AMD*, étant exprimé par $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$, il s'ensuit qu'il est moindre que le temps de la descente par la corde *AD*, puisque $\frac{\pi}{2}$ est moindre que 2. Dans ce cas, quoique la ligne droite soit toujours le chemin le plus court, elle n'est pourtant pas celui qui exige le moindre temps. Ce n'est même pas l'arc de cercle. Il y a long-temps que M. Bernoulli a démontré pour la premiere fois que c'étoit un arc de cycloïde.

PROBLÊME I.

422. Soient *AB* & *AC* deux demi-cycloïdes décrites par la rotation du cercle qui a pour diametre *AK*, sur l'horizontale *GKH*. Si on prend un fil *ARM* double de *AK* ou égal en longueur à l'une de ces courbes, suspendant ce fil au point *A*, & supposant un corps infiniment F... 163.

petit M attaché à l'autre extrémité, ce corps décrira dans son mouvement la cycloïde entiere BDC, dont le cercle générateur sera égal à celui des deux demi-cycloïdes, & qui aura la ligne horizontale BKC pour base. Cela posé, on demande la durée d'une oscillation de ce pendule par l'arc FDF'.

Soit $a =$ la longueur du Pendule, $\frac{1}{2} a =$ le diametre du cercle générateur, $s =$ l'arc DM, $x = DP$; on aura par la nature de la cycloïde, $s^2 = 2ax$; d'où on tirera $ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax}}$. Si on appelle b la hauteur DE du point F qui est l'origine du mouvement, la vîtesse de ce corps parvenu en M sera $= \sqrt{(b-x)2g}$, & on aura $dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(b-x)}} = \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}$. Mais l'intégrale de $\frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$ prise entre les limites $x = 0$ & $x = b$ se réduit toujours à π. Donc le temps de la descente par l'arc FMD sera exprimé par $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$, & par conséquent le temps d'une oscillation entiere dans l'arc FDF' sera $T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. Or ce temps est à celui de la descente par le diametre vertical $KD :: \pi : 1$, c'est-à-dire comme la circonférence est au diametre. Donc *toutes les oscillations d'un pendule qui décrit des arcs de cycloïde, sont d'une égale durée, quelle que soit leur étendue.*

423. Cette propriété singuliere a fait donner à la cycloïde & à toutes les autres courbes qui ont le même avantage, le nom de *Courbes Tautochrones*. Ce fut M. Huyghens, homme d'un rare génie, qui après avoir démontré le premier que les grandes comme les petites oscillations d'un

d'un même pendule, entre deux lames cycloïdales, se faisoient toutes en temps égaux, imagina qu'un pendule de cette espece seroit propre à servir de balancier ou de régulateur aux Horloges. Quelle que fut en effet l'impression donnée à ce pendule par l'échappement, les oscillations ne pouvoient être qu'isochrones.

Mais quoique très-belle dans la théorie, cette invention n'eut que de médiocres succès dans la pratique. Pour lui en procurer de plus solides, il eût fallu vaincre des difficultés presque insurmontables. Ces difficultés consistoient à donner & à conserver à des lames de métal AR & AR' une forme cycloïdale bien égale. Et comment se flater d'y réussir, tant de causes concourant à la leur faire perdre? Leur contraction inévitable pendant le froid, & leur dilatation pendant le chaud s'opposoient sur-tout à l'uniformité de leur figure, & l'isochronisme du nouveau pendule devenoit par-là fort suspect. Aussi cet inconvénient détermina-t-il les Artistes à substituer le pendule circulaire à celui de M. Huyghens, après que l'on eut reconnu que les oscillations dans les petits arcs de cercle étoient également isochrones. Mais pour juger du mérite des inventions modernes, relativement à la perfection du pendule circulaire, & à la mesure du temps, il faut lire les Ouvrages des savants Horlogers qui s'en sont occupés.

PROBLÊME II.

423. Soit EMD une courbe quelconque; soit E le FIG. 164.

point d'où on suppose q'uun corps tombe en vertu d'une force centripete dirigée vers C & proportionnelle à une fonction quelconque des distances que j'appelle P; il s'agit de déterminer la vîtesse de ce corps en un point quelconque M, & le temps de sa descente par l'arc EM.

Faisant $CM = z$ & décomposant la force P suivant MC en deux autres, l'une normale, l'autre tangentielle, la premiere aura pout valeur $\frac{P\sqrt{(ds^2 - dz^2)}}{ds}$; & en l'ajoutant à la force centrifuge $\frac{uu}{R}$, on aura la pression totale sur la courbe. La seconde sera $-\frac{Pdz}{ds}$, & elle accélèrera le mouvement; donc $g\,dv = -P\,dz$, & $gv = gh - \int P\,dz$. Le temps se déterminera par la formule $dt = \frac{-ds}{\sqrt{(2gh - 2\int Pdz)}}$.

EXEMPLE.

424. On suppose que l'arc EMD est infiniment petit, qu'il rencontre à angles droits l'axe CD, & que le rayon osculateur en D est a. Dans ce cas, on peut regarder EMD comme un arc de cercle décrit du rayon a, & la puissance P comme constante, & comme exprimée par ng, On aura donc $v = n(b - z)$, désignant CE par b. Donc $dt\sqrt{2gn} = \frac{ds}{\sqrt{(b-z)}}$. Or par la nature du cercle, en posant $CD = f$, & $DP = x$, on a $2ax - xx + (f + x)^2 = zz$; donc $x = \frac{zz - ff}{2a + 2f}$ & $2ax$ ou $s = \frac{zz - ff}{a + f}a$; donc $zz = ff + \frac{a+f}{a}s$, & $z = f + \frac{a+f}{2af}s^2$.

Mais lorsque $z = b$, la quantité s doit être $= DME$

que nous appellerons m ; donc $b - z = \frac{a+f}{2af}(mm - ss)$, donc enfin $dt = \frac{-ds}{\sqrt{(mm-ss)}} \sqrt{\frac{af}{gn(a+f)}}$. Et si on prend l'in-l'intégrale entre les limites $s = b \ldots s = 0$, elle deviendra $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{af}{gn(a+f)}}$. On aura donc pour le temps d'une oscillation entiere dans l'arc infiniment petit EDE', la formule $T = \pi \sqrt{\frac{af}{gn(a+f)}}$. Or le pendule qui a pour longueur L, & qui est animé par la force de la gravité g suivant des directions paralleles fait ses oscillations dans un temps exprimé par $\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$. Donc dans le cas précédent la longueur du pendule simple isochrone doit être $\frac{af}{n(a+f)}$.

425. Si EMD étoit une ligne droite, le rayon osculateur a seroit alors infini, & la durée d'une oscillation sur cette ligne deviendroit $\pi \sqrt{\frac{f}{ng}}$ ou même $\pi \sqrt{\frac{f}{g}}$, lorsque la force centrale seroit la gravité. Il suit delà qu'un corps placé sur un plan parfaitement horizontal, sur lequel il n'éprouveroit aucun frottement, étant très-peu écarté du point D par où passe la perpendiculaire menée du centre C, feroit des oscillations dont chacune auroit pour durée $\pi \sqrt{\frac{f}{g}}$. Le pendule isochrone auroit donc pour longueur le rayon même de la terre ; & pour faire environ 17 oscillations, il lui faudroit 12 heures entieres.

EXEMPLE III.

426. [Quel doit être le mouvement d'un pendule dans *

un milieu réſiſtant, au cas qu'il oſcille entre deux cycloïdes ?

Fig. 163. Soit $DA = a$, $DK = \frac{1}{2}a$, $DP = x$, $DM = s = \sqrt{2ax}$; la force de la gravité g accélèrera le corps ſuivant la tangente, & cette accélération ſera $\frac{g\,dx}{ds}$; la réſiſtance du milieu le retardera au contraire de la quantité $\frac{gu^2}{c^2}$ ou $\frac{gv}{k}$: Donc $dv = -dx + \frac{v\,ds}{k}$, ou $dv - \frac{v\,ds}{k} = -dx = -\frac{s\,ds}{a}$. Multipliant par $e^{\frac{-s}{k}}$, on aura $e^{\frac{-s}{k}}dv - \frac{v\,ds}{k}e^{\frac{-s}{k}} = \frac{-s\,ds}{a}e^{\frac{-s}{k}}$, dont l'intégrale eſt $e^{\frac{-s}{k}}v = b + \frac{k^2+sk}{a}e^{\frac{-s}{k}}$, ou $v = be^{\frac{s}{k}} + \frac{k^2+sk}{a}$.

Soit m l'arc DMF, il faudra que $s = m$, lorſque $v = 0$; donc $be^{\frac{m}{k}} + \frac{k^2+mk}{a} = 0$; & par conſéquent $v = \frac{k^2+sk}{a} - \frac{k^2+mk}{a}e^{\frac{s-m}{k}}$. La vîteſſe ſera la plus grande, lorſque $dv = 0$. Alors $\frac{v}{k} = \frac{s}{a}$ par l'équation différentielle & par celle-ci $k^2 - (k^2+mk)e^{\frac{s-m}{k}} = 0$; ce qui donne $s = m - kL\left(1+\frac{m}{k}\right) = \frac{m^2}{2k} - \frac{m^3}{2k} + \frac{m^4}{4k^3} -$ &c.

Ici le point de la plus grande vîteſſe n'eſt jamais, comme dans le vuide, au point le plus bas D, mais elle a lieu un peu avant que le corps arrive en D. La hauteur dûe à la vîteſſe en D eſt exprimée par la quantité $\frac{k^2}{a} - \frac{k^2+mk}{a}e^{\frac{-m}{k}}$.

427. Quand le corps animé de cette vîteſſe monte au lieu de deſcendre, alors la peſanteur ſe joint à la réſiſtance du milieu pour rallentir ſon mouvement. Les deux forces réunies agiſſent ſur lui, la premiere avec une action $\frac{g\,dx}{ds}$, la ſeconde avec une action $\frac{g\,v}{k}$; ce qui donne $dv = -dx - \frac{v\,ds}{k}$ ou $dv + \frac{v\,ds}{k} = -dx$. On intégrera cette formule, comme celle de la deſcente, faiſant ſeulement attention que k doit être pris négativement. L'intégrale donnera $v = b\,e^{\frac{-s}{k}} + \frac{k^2 - sk}{a}$. Mais quand $s = 0$, v devient $\frac{k^2}{a} - \frac{(k^2 + mk)}{a}\,e^{\frac{-m}{k}}$. Donc $b = -\frac{(k^2 + mk)}{a}\,e^{\frac{-m}{k}}$, & la valeur de $v = \frac{k^2 - sk}{a} - \frac{(k^2 + mk)}{a}\,e^{\frac{-s-m}{k}}$.

Soit m' l'arc total DF'' que le corps parcourt en montant, on trouvera m', en faiſant $v = 0$ & réſolvant l'équation $k - m' = (k + m)\,e^{\frac{-m'-m}{k}}$, ou $(k - m')\,e^{\frac{m'}{k}} = (k + m)\,e^{\frac{-m}{k}}$. Réduiſant cette équation en ſérie, on aura $\frac{m'^2}{2} + \frac{m'^3}{3k} + \frac{m'^4}{8k^2} + \frac{m'^5}{30k^3} + \&c = \frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3k} + \frac{m^4}{8k^2} - \frac{m^5}{30k^3} + \&c$; d'où on déduit par la méthode inverſe des ſuites, $m' = m - \frac{2}{3} \cdot \frac{m^2}{k} + \frac{4}{9} \cdot \frac{m^3}{k^2} - \frac{44}{135} \cdot \frac{m^4}{k^3} + \&c$

428. Cette derniere ſérie eſt d'un grand uſage, quand la réſiſtance du milieu eſt petite; parce qu'alors k devient fort grand. D'ailleurs cette ſérie approche beaucoup d'une

progreſſion géométrique, puiſque les quatre premiers termes ſont déja en progreſſion ; le coëfficient du quatrieme en effet $\frac{44}{135}$, tient lieu du coëfficient $\frac{8}{27}$, auquel il eſt à peu-près égal. Sommant donc cette ſuite de termes, on aura $m' = \frac{3km}{3k + 2m}$. Ainſi l'arc qu'un mobile parcourt en deſcendant, étant déſigné par m, on aura $\frac{3km}{3k+2m}$ pour repréſenter l'arc de la montée. Mais puiſque cette derniere quantité eſt moindre que m, il faut en conclure ce que l'expérience ne confirme que trop, ſavoir que dans un milieu réſiſtant les corps n'ont plus, comme dans le vuide, la propriété de monter à des hauteurs égales à celles dont ils ſont deſcendus.

429. La premiere oſcillation par l'arc $m + m'$ étant faite, le mobile en commencera une ſeconde en deſcendant par l'arc m', & il l'achevera en montant par un arc $m'' = \frac{3km'}{3k + 2m'}$. Subſtituant $\frac{3km}{3k+2m}$ au lieu de m' dans cette derniere expreſſion, on aura $m'' = \frac{3km}{3k+4m}$. Quant à la troiſieme oſcillation, le pendule la fera en deſcendant par l'arc m'', & en montant par un arc plus petit $m''' = \frac{3km''}{3k+4m''} = \frac{3km}{3k+6m}$. Donc en général, pour la n^{ieme} oſcillation l'arc de deſcente ſera $\frac{3km}{3k+2m(n-1)}$, & l'arc de montée aura pour expreſſion $\frac{3km}{3k+2mn}$.

Si on appelle E ce dernier arc, on aura $E = \frac{3km}{3k+2mn}$; ou $3k(m - E) = 2nmE$. La différence entre cet arc &

le premier arc de descente est donc proportionnelle au nombre d'oscillations faites, soit dans le premier soit dans le dernier arc conjointement, ou bien le nombre des oscillations est proportionel à $\frac{1}{E} - \frac{1}{m}$. On peut même connoître par expérience la quantité k qui exprime la résistance, en mesurant le premier arc de descente m & le dernier arc de montée E, pourvu que l'on compte exactement le nombre des oscillations.

430. Pour trouver maintenant la durée d'une oscillation, on remontera à la formule trouvée ci-dessus, $v = \frac{k^2 + sk}{a} - \frac{k^2 + mk}{a} e^{\frac{s-m}{k}}$ qui étant réduite en série donne $av = k^2 + sk - (k^2 + mk)\left(1 + \frac{s-m}{k} + \frac{(s-m)^2}{2k^2} + \&c\right)$ $= \frac{m^2 - s^2}{2} - \frac{(2m+s)(m-s)^2}{6k} + \frac{(3m+s)(m-s)^3}{24k^2} - \frac{(4m+s)(m-s)^4}{120k^3}$ + &c. Donc $\sqrt{\left(\frac{m^2-s^2}{2av}\right)} = 1 + \frac{(2m+s)(m-s)}{6k(m+s)} + \ldots \frac{m^2(m-s)^2}{24k^2(m+s)^2}$; & parce que $dt = \frac{-ds}{\sqrt{2gv}}$, on a $dt\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{-ds}{\sqrt{(m^2-s^2)}} - \frac{1}{6k} \cdot \frac{ds(2m+s)(m-s)}{(m+s)\sqrt{(m^2-s^2)}} - \frac{m^2}{24k^2} \cdot \frac{ds(m-s)^2}{(m+s)^2\sqrt{(m^2-s^2)}}$. Or $\frac{-ds}{\sqrt{(m^2-s^2)}}$ a pour intégrale Arc $cos\frac{s}{m}$, qui se réduit à $\frac{1}{2}\pi$, lorsque $s = 0$.

Le second terme $\frac{-ds(2m+s)(m-s)}{(m+s)\sqrt{(m^2-s^2)}}$ peut être changé en celui-ci $\frac{-2m^2ds}{(m+s)\sqrt{(m^2-s^2)}} + \frac{sds}{\sqrt{(m^2-s^2)}}$, lequel a pour intégrale la quantité $2m\sqrt{\frac{m-s}{m+s}} - \sqrt{(m^2 - s^2)}$, qui en supposant $s = 0$ se réduit à m; l'intégration du second terme

donnera donc $\frac{m}{6k}$. Le troisieme terme qui est $\frac{-ds(m-s)^2}{(m+s)^2\sqrt{(m^2-s^2)}}$ a pour intégrale $-2\sqrt{\frac{m-s}{m+s}}+\frac{2}{3}.\left(\frac{m-s}{m+s}\right)^{\frac{3}{2}}+2$ Arc *tang* $\sqrt{\left(\frac{m-s}{m+s}\right)}$; & si on fait $s=0$, l'intégration donnera $-\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}$. Donc enfin le temps de la descente par l'arc FMD est généralement exprimé par la quantité . . . . $\left[\frac{\pi}{2}+\frac{m}{6k}+\frac{m^2}{24k^2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\right)\right]\sqrt{\frac{a}{g}}$.

431. Pour avoir celui de la montée, on remarquera que lorsque le corps monte, $v=\frac{k^2-sk}{a}-\frac{k^2+mk}{a}e^{\frac{-s-m}{k}}$, & qu'alors m' étant l'arc entier de montée, on a $(k+m)e^{\frac{-m}{k}}=(k-m')e^{\frac{m'}{k}}$; donc $av=k^2-sk-(k^2-m'k)e^{\frac{m'-s}{k}}$, équation qui se déduit de la formule $av=k^2+sk-(k^2+mk)e^{\frac{s-m}{k}}$, déja trouvée pour la descente, dans laquelle seulement on fait k négatif, & où on substitue m' à m. Donc puisque l'intégrale qui donne le temps par l'arc m' doit être prise entre les limites $s=0$, $s=m'$, il faut prendre k négatif & m' au lieu de m dans la formule qui donne le temps de la descente ; afin d'en déduire celui de la montée $\left[\frac{\pi}{2}-\frac{m'}{6k}+\frac{m'^2}{24k^2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\right)\right].\sqrt{\frac{a}{g}}$.

Et si on ajoute ces deux formules, on aura le temps T d'une oscillation entiere, par l'équation suivante,

$$T=\left[\pi+\frac{m-m'}{6k}+\frac{m^2+m'^2}{24k^2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\right)\right].\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

432. Si on substitue dans cette équation la valeur de m' qui est $m-\frac{2}{3}.\frac{m^2}{k}+$ &c, c'est-à-dire si on met $\frac{2}{3}.\frac{m^2}{k}$ au

. au

lieu de $m - m'$, & m^2 au lieu de m'^2, on aura $T = \left(1 + \frac{1}{24} \cdot \frac{m^2}{k^2}\right)\pi \cdot \sqrt{\frac{a}{g}}$, d'où l'on voit que ce temps n'excede celui que nous avons déja trouvé pour une oscillation dans le vuide, que d'une quantité extrêmement petite $\frac{m^2}{24k^2} \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$, qui est proportionelle au quarré de l'arc parcouru.

A la n^{ieme} oscillation ; l'arc de montée est $E = \frac{3km}{3k + 2mn}$; donc la durée de cette oscillation est . . . . $\left(\pi + \frac{\pi}{24} \cdot \frac{9m^2}{(3k + 2mn)^2}\right) \sqrt{\frac{a}{g}}$.

Voilà donc toutes les circonstances du mouvement d'un pendule cycloïdal déterminées pour une oscillation quelconque faite dans un milieu peu résistant, tel que l'air par exemple ; & tout cela peut s'appliquer au mouvement du pendule circulaire, lorsque l'étendue des vibrations est petite.

REMARQUE.

433. LORSQUE la résistance des fluides est en partie constante & en partie proportionelle au quarré de la vîtesse ; il faut dans les mouvements très-lents ou dans les oscillations très-petites avoir égard à la premiere partie qui peut devenir sensible par rapport à la seconde. Cette considération d'ailleurs ne rend pas le calcul plus compliqué, ainsi qu'il est aisé de le voir par l'application suivante.

Supposons que le point F soit le commencement de la FIG. 163.

descente dans l'arc FMD; le mobile étant arrivé en M, soit $DP = x$, $DM = s$, $\frac{g\,dx}{ds}$ sera la force tangentielle qui résulte de la gravité; & si par R on désigne la résistance, on aura $dv = -dx + \frac{R\,ds}{g}$. Or dans ce cas R est composé de la partie $\frac{gv}{k}$, proportionelle au quarré de la vîtesse, & d'une partie constante $\frac{gh}{k}$; on aura donc $dv = -dx + \frac{v\,ds}{k} + \frac{h\,ds}{k}$, équation qui donnera généralement la vîtesse du mobile, quelle que soit la courbe qu'il décrit dans son mouvement.

Si c'est un cycloïde, a étant la longueur du pendule, on aura $s^2 = 2ax$, & $dx = \frac{s\,ds}{a}$; donc $dv - \frac{v\,ds}{k} = \frac{s\,ds}{a} - \frac{h\,ds}{k}$. Multipliant par $e^{\frac{-s}{k}}$ & intégrant, il viendra $ve^{\frac{-s}{k}} = b + he^{\frac{-s}{k}} + \frac{k^2 + sk}{a}e^{\frac{-s}{k}}$, ou $v = be^{\frac{s}{k}} + h + \frac{k^2 + sk}{a}$. Lorsque $s = m$, $v = 0$; donc $be^{\frac{m}{k}} = -h - \frac{k^2 + mk}{a}$, & $v = h + \frac{k^2 + sk}{a} - \left(h + \frac{k^2 + mk}{a}\right)e^{\frac{s-m}{k}}$. La vîtesse du mobile au point le plus bas D sera dûe à la hauteur $h + \frac{k^2}{a} - \left(h + \frac{k^2 + mk}{a}\right)e^{\frac{-m}{k}}$.

Pour appliquer ces équations au mouvement du corps, quand il monte, changez s & m en $-s$ & $-m'$; vous aurez $v = h + \frac{k^2 - sk}{a} - \left(h + \frac{k^2 - m'k}{a}\right)e^{\frac{m'-s}{k}}$. Or l'arc

de montée m' ſe déterminera par l'équation $\left(h + \frac{k^2 - m'k}{a}\right) e^{\frac{m'}{k}} = \left(h + \frac{k^2 + mk}{a}\right) e^{\frac{-m}{k}}$.

La méthode inverſe des ſéries donnera $m' = m - \frac{1}{k}(2ah + \frac{2}{3}m^2) + \frac{1}{k^2}(\frac{4}{9}m^3 + \frac{4}{3}ahm) = m(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{m}{k} + \frac{4}{9} \cdot \frac{m^2}{k^2}) - \frac{2ah}{k}(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{m}{k}) = (m - \frac{2ah}{k})(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{m}{k} + \frac{4}{9} \cdot \frac{m^2}{k^2}) = \frac{3mk - 6ah}{3k + 2m}$.

Dans la ſeconde oſcillation, l'arc de montée $m'' = \frac{3m'k - 6ah}{3k + 2m'} = \frac{3mk - 12ah}{3k + 4m}$. Dans la troiſieme oſcillation l'arc de montée $m''' = \frac{3mk - 18ah}{3k + 6m}$; & en général dans la n[ieme] oſcillation l'arc de montée que nous pouvons repréſenter par M ſera $\frac{3mk - 6nah}{3k + 2nm}$; d'où on tirera $n = \frac{3k(m - M)}{2mM + 6ah}$.

Marquant donc bien exactement l'arc de deſcente m de la premiere oſcillation, & l'arc de montée M de la derniere oſcillation, ſi on compte fort exactement auſſi le nombre total des oſcillations, on aura une premiere équation entre h & k. Répétant une ſeconde fois la même expérience, on aura une ſeconde équation entre h & k, qui combinée avec la premiere ſervira à déterminer ces quantités. On pourra donc connoître par ce moyen la valeur abſolue de la réſiſtance de l'air, ſoit la partie proportionnelle au quarré de la vîteſſe, ſoit la partie conſtante.

Exemple.

434. Entr'autres expériences faites avec beaucoup de

ſoin ſur cette matiere, on lit dans les Principes de Newton, L. II, Sect. VI, Prop. XXXI, l'expérience ſuivante.

Un globe dont le diametre étoit de 6 pouces $\frac{7}{8}$ de Londres, & qui peſoit 57 onces Romaines + $\frac{7}{11}$ étoit ſuſpendu à un fil de maniere qu'entre le point de ſuſpenſion & le centre d'oſcillation (où tout le corps étoit cenſé réuni & oſciller comme un point) il y avoit une diſtance de 10 pieds $\frac{1}{2}$ meſure de Londres. Un nœud avoit été fait ſur ce fil à la diſtance de 10 pieds 1 pouce du point de ſuſpenſion; & l'arc décrit par ce nœud ſervoit à meſurer celui que le centre d'oſcillation décrivoit en même temps. Pour cet effet on multiplioit le premier par $\frac{126}{121}$.

On mit ce pendule en mouvement, de maniere que l'arc décrit par le nœud juſqu'à la verticale fût de deux pouces, & on le laiſſa oſciller juſqu'à ce qu'il eût perdu la huitieme partie de ſon mouvement. Il la perdit au bout de 164 oſcillations, & le dernier arc de montée ne fût plus que de 1 pouce $\frac{3}{4}$.

Puis on écarta le nœud à une diſtance double de la verticale; l'arc qui meſuroit l'intervalle étoit donc de 4 pouces. On obſerva qu'après 121 oſcillations le pendule avoit perdu la huitieme partie de ſon mouvement. Enfin répétant la même opération pour quelques autres diſtances du nœud à la verticale marquées ci-après, on trouva que pour faire perdre au pendule la huitieme partie de ſon mouvement, il falloit le laiſſer oſciller un certain nombre de fois, marqué dans la ligne ſuivante.

Oscillations . . . 164 . . . 121 . . . 69 . . . $35\frac{1}{2}$ . . . $18\frac{1}{2}$ . . . $9\frac{2}{3}$
Écarts primitifs en pouces . . . 2 . . . . . 4 . . . . 8 . . . 16 . . . . 32 . . . 64

Appliquons maintenant la théorie à cette expérience : les résultats en sont intéressants. Puisque le premier arc de descente est m, on aura au bout d'un nombre n d'oscillations le dernier arc de montée, exprimé par $\frac{3mk - 6nah}{3k + 2mn}$, quantité qui deviendra égale à $\frac{7}{8}m$ lorsque le pendule aura perdu la huitieme partie de son mouvement. Ainsi on aura $\frac{3}{8}mk = n(\frac{7}{4}m^2 + 6ah)$.

Soit m' un autre arc de descente, soit n' le nombre d'oscillations correspondant ; on aura de même $\frac{3}{8}km' = n'$ $(\frac{7}{4}m'^2 + 6ah)$; d'où on déduira $\frac{3}{8}k\left(\frac{m}{n} - \frac{m'}{n'}\right) = \frac{7}{4}(m^2 - m'^2)$, & par conséquent

$$k = \frac{\frac{14}{3}(m^2 - m'^2)}{\frac{m}{n} - \frac{m'}{n'}}.$$

Si m est double de m', comme il arrive en prenant deux observations consécutives de la petite table qui précede, on aura $k = \frac{7m'nn'}{2n' - n}$. Or m' est l'arc décrit par le centre d'oscillation, & si on veut lui substituer celui qui est parcouru par le nœud, il n'en résultera pour k que les $\frac{121}{126}$.

Prenons donc les deux premieres observations, & faisons $m' = 2$, $n = 121$, $n' = 164$; nous aurons $\frac{14m'nn'}{2n' - n} = 2684$ pouces $= 223$ pieds $\frac{2}{3}$. Ce sera la valeur de $\frac{121}{126}k$. Prenant la seconde & la troisieme de ces mêmes observations, & faisant $m' = 4$, $n' = 121$, $n = 69$, on en dé-

duira $\frac{121}{126}k = 225$ pieds $\frac{1}{4}$; enſorte que ſi on compare deux à deux les différents réſultats de cette expérience, on aura en pieds de Londres les valeurs ſuivantes pour la quantité $\frac{121}{126}k$

$$223\tfrac{2}{3} \ldots 225\tfrac{1}{4} \ldots 223 \ldots 233\tfrac{1}{2} \ldots 244$$

Il eſt vrai que les deux dernieres valeurs different ſenſiblement des trois premieres : mais auſſi avons-nous remarqué que cette théorie ne devoit être appliquée qu'aux oſcillations faites dans la cycloïde ou dans de petits arcs de cercle. C'eſt pour l'une ou l'autre de ces ſuppoſitions que la formule $M = \frac{3mk - 6nah}{3k + 2nm}$ eſt applicable, & non dans les cas où, comme dans les deux dernieres obſervations, l'arc initial eſt ſi conſidérable. Il eſt de 32 pouces dans l'une & de 64 dans l'autre.

Si on s'en tient aux trois premieres, leur accord eſt auſſi ſatisfaiſant qu'il puiſſe être dans des expériences d'une telle délicateſſe : & ſi on prend un milieu entre les trois réſultats, on aura 224 pieds pour la valeur réelle de $\frac{121}{126}k$. Donc $k = 233$ pieds de Londres : or le pied de Londres eſt à celui de Paris : : 811 : 864 ; donc $k = 219$ pieds de Paris.

Donc le globe en queſtion animé d'une vîteſſe dûe à la hauteur de 219 pieds, éprouveroit de la part de l'air une réſiſtance égale à la gravité. Ce globe animé d'une telle vîteſſe dans le premier inſtant de ſa chûte ſeroit mû uniformément, parce que l'accélération de la gravité ſeroit égale & contraire à la réſiſtance du fluide.

435. La quantité k qui mesure la partie principale de cette résistance, c'est-à-dire la partie qui est proportionnelle au quarré de la vîtesse, étant ainsi déterminée, on n'aura plus qu'à déterminer h qui en mesure la partie constante. Pour cet effet on reprendra l'équation $\frac{1}{8} \cdot \frac{km}{n} = \frac{7}{4} m^2 + 6ah$, qui donne $48ah = 3k \cdot \frac{m}{n} - 14m^2$. Or dans la premiere observation $m = \frac{116}{121} \cdot 2$ pouces, $k = \frac{116}{121} \cdot 12 \cdot 224$, $n = 164$, $a = 126$; donc $h = 0{,}00759$ de pouce.

Calculant la même quantité dans la seconde expérience, & prenant $m = \frac{116}{121} \cdot 4$, $n = 121$, on aura $h = 0{,}00763$; résultat trop conforme au premier pour ne pas inspirer de la confiance dans la théorie qui y mene. Si on prend un milieu, on trouvera que $h = 0{,}00761$ de pouce. Or nous avons supposé que la partie constante de la résistance étoit exprimée par $\frac{gh}{k}$; donc puisque $k = 233 \cdot 12$ pouces, nous aurons $\frac{h}{k} = 0{,}0000027$.

Ainsi la résistance constante qu'éprouve le globe de la part de l'air n'est à peu de chose près que la quatre cent-millieme partie de la gravité. Mais fût-elle plus petite encore, il faudroit cependant y avoir égard dans les mouvements très-lents, parce qu'elle peut alors surpasser infiniment la partie de la résistance, qui est proportionnelle au quarré de la vîtesse.

436. Cette résistance constante ayant lieu dans tous les fluides, il peut arriver que le pendule reste en équilibre, sans que le fil soit absolument vertical. Il suffit pour cela que la force tangentielle $g \sin MCD$ de la gravité soit FIG. 162.

égale à la résistance $\frac{g}{400000}$, & par conséquent que le sinus de l'angle MCD soit 0,0000027, ce qui donne 6″ pour l'angle MCD lui-même. La ligne d'à-plomb d'un tel pendule peut donc s'éloigner de 6″ de la véritable verticale.

437. Il suit delà que le pendule restera en repos, lorsque le dernier arc de montée sera $\frac{ah}{k}$. Quant au nombre d'oscillations qu'il doit faire pour parvenir au repos, on le calculera par la formule $\frac{ah}{k} = \frac{3mk - 6nah}{3k + 2nm}$; d'où on déduit aussi-tôt $anh = \frac{3mk - 3ah}{6 + \frac{2m}{k}}$, ce qui donne pour la premiere observation, $n = 8565593$ oscillations que le pendule doit faire, avant d'avoir perdu tout son mouvement.

Et comme la longueur de ce pendule est de 126 pouces de Londres, ou de $\frac{21{,}811}{1728}$ pieds de Paris, la durée d'une oscillation doit être de 1″,7948 : ainsi son mouvement durera un peu moins de 178 jours, abstraction faite du frottement que le point de suspension occasionne. Il ne faudra cependant pas tout ce temps, pour que le mouvement devienne insensible.

PROBLÈME IV.

Fig. 165. 438. Entre deux points donnés A & B, décrire sur un plan vertical la courbe AMB, telle qu'un corps descendant du repos le long de cette courbe, depuis A jusqu'en B, parcoure l'arc AB dans le moindre temps possible.

Ce Problême se réduit à trouver la ligne dans laquelle

laquelle l'expression du temps est un *Minimum*. Pour la déterminer, menons par le point A une horizontale AP, & prenons sur la courbe deux éléments consécutifs MM', $M'M''$. Soient élevées des points M, M', M'' les perpendiculaires MP', $M'P'$, $M''P''$ sur la ligne AP que nous appellerons x, PM sera y, AM sera s.

Cela posé, le corps étant parvenu en M doit avoir la même vîtesse que s'il étoit tombé de la hauteur verticale MP : ainsi le temps employé à parcourir l'arc AM sera représenté par $\int \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$. Il faut donc que $\int \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$ ou simplement $\int \frac{ds}{\sqrt{y}}$ soit un *Minimum*.

Pour exprimer cette condition, supposons que le point M' varie infiniment peu dans la direction horizontale ; il est clair que si l'arc MM'' fait partie de la courbe cherchée, le temps n'en devra pas varier pour cela. Or la seule partie de temps qui soit susceptible de variation est celle qui est employée à parcourir les deux éléments consécutifs MM', $M'M''$, ou $\frac{ds}{\sqrt{y}} + \frac{ds'}{\sqrt{y'}}$. De quelque maniere en effet que le point M' soit situé, s'il n'y a que lui qui varie, la vîtesse en M'' pour parcourir $M''B$ sera toujours la même.

On aura donc $\frac{\delta ds}{\sqrt{y}} + \frac{\delta ds'}{\sqrt{y'}} = 0$; & puisque $ds^2 = dx^2 + dy^2$, on trouvera que $ds\,\delta ds = dx\,\delta dx$, & que $ds'\,\delta ds' = dx'\,\delta dx'$. Donc $\frac{dx}{ds\sqrt{y}}\,\delta dx + \frac{dx'}{ds'\sqrt{y'}}\,\delta dx' = 0$. Mais $dx + dx'$ étant une quantité constante, on aura $\delta dx' = -\delta dx$, & par conséquent $\frac{dx'}{ds'\sqrt{y'}} - \frac{dx}{ds\sqrt{y}} = 0$; ou ce qui est la mê-

me chose, $d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{y}}\right) = o$, équation de la courbe demandée.

Si on l'integre, il viendra $\frac{dx}{ds\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, ou $a\,dx^2 = y\,ds^2 = y\,dx^2 + y\,dy^2$; donc $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(a-y)}}$, ce qui fait reconnoître aussi-tôt la cycloïde, comme on peut s'en convaincre, en changeant cette derniere équation en celle-ci, $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}} = \frac{y\,dy - \frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}} + \frac{\frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}}$, dont l'intégrale est $x = C - \sqrt{(ay-yy)} + \int \frac{\frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}}$.

FIG. 166. 439. Il suit de l'équation $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(a-y)}}$, qu'au point D le plus bas, l'ordonnée $CD = a$; & si on imagine un demi-cercle décrit sur le diametre CD, on aura, en menant l'horizontale MQ, les valeurs suivantes

$$NQ = \sqrt{(ay-yy)} \ldots CN = \int \frac{\frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}} \ldots \text{donc } AP = CN - NQ.$$

Par la même raison $AC = CND$; donc $AC - AP$ ou CP ou $MQ = CND - CN + NQ = ND + NQ$, ou $MN = DN$, ce qui est la propriété si connue de la cycloïde. Donc *la cycloïde est la ligne de la plus vîte descente.*

FIG. 167. 440. Comme les deux points A & B sont donnés, il ne sera pas difficile de décrire par ces deux points la courbe cherchée. On pourra tracer d'abord une cycloïde sur la base horizontale AL prise à volonté. Cette courbe rencontrant en K la corde AB, on menera par le point B, la ligne BF parallele à KL, & AF sera la base de la cycloïde demandée, ou ce qui est la même chose, AF sera égale

à la circonférence de ſon cercle générateur. Or ce cercle étant une fois connu, la deſcription de la cycloïde qui en dépend eſt facile. Cette conſtruction eſt fondée ſur ce que toutes les cycloïdes ſont des courbes ſemblables ; effectivement il n'entre dans leur équation d'autre conſtante que le diametre du cercle générateur.

Tous les Géometres du premier rang s'occuperent au commencement de ce ſiecle du problême de la ligne de la plus vîte deſcente, & ils trouverent tous pour réſultat un arc de cycloïde. Delà vient le nom de *Courbes Brachiſtochrones* pour déſigner généralement celles qui ont la propriété d'être ſuivant les différents cas, lignes de la plus vîte deſcente. Mais pour traiter cette matiere avec plus de généralité, nous ajouterons le problême ſuivant.

Problême V.

441. Quelles que ſoient les puiſſances qui ſollicitent un corps ſur un plan donné, trouver la ligne de la plus vîte deſcente d'un point à un autre.

Ayant réduit toutes ces puiſſances à deux, l'une ſuivant *PM*, l'autre parallele à *AP*, ſoit *Y* la premiere, *X* la ſeconde, v la hauteur dûe à la viteſſe en *M*. On aura pour exprimer le temps de la deſcente par $MM'M''$, la quantité $\frac{ds}{\sqrt{v}} + \frac{ds'}{\sqrt{v'}}$ dont la différentielle doit être égale à zéro. Or dans cette différentiation, tout ce qui dépend du point M' eſt variable : ainſi on a $\frac{\delta ds}{\sqrt{v}} + \frac{\delta ds'}{\sqrt{v'}} - \frac{ds\,\delta v'}{2v'\sqrt{v'}} = 0$. Fig. 165.

Et ſi on ſuppoſe que la fluxion du point M' ſe fait ho-

rizontalement, on aura $\delta dy = 0$ . . . $\delta ds = \frac{dx}{ds}\delta dx$ . . . $\delta ds' = \frac{dx'}{ds'}\delta dx' = -\frac{dx'}{ds'}\delta dx$. Donc $\left(\frac{dx}{ds\sqrt{v}} - \frac{dx'}{ds'\sqrt{v'}}\right)\delta dx - \frac{ds'\delta v'}{2v'\sqrt{v'}} = 0$; ou ce qui est la même chose, $d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{v}}\right)\delta dx + \frac{ds'\delta v'}{2v'\sqrt{v'}} = 0$.

Or $\frac{Xdx + Ydy}{ds}$ étant la force tangentielle, on a $gdv = Xdx + Ydy$ . . . $gdv' = X'dx' + Y'dy'$. Changeant dans celle-ci d en δ, on aura $g\delta v' = X'\delta x' + Y'\delta y' = X'\delta dx$. Donc $\delta v' = \frac{X'}{g}\delta dx$, & l'équation de la courbe sera $d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{v}}\right) + \frac{Xds}{2gv\sqrt{v}} = 0$; dans laquelle si au lieu de $d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{v}}\right)$ on met $\frac{1}{\sqrt{v}}d\left(\frac{dx}{ds}\right) - \frac{dxdv}{2vds\sqrt{v}}$, on aura $2vd\left(\frac{dx}{ds}\right) + \ldots \frac{Xds^2 - gdxdv}{gds} = 0$; & substituant à gdv sa valeur $Xdx + Ydy$, il viendra $2vd\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{Xdy^2 - Ydydx}{gds} = 0$, ou . . . . . $\frac{Ydx - Xdy}{ds} = 2gv \cdot \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dy}$. Mais le rayon osculateur $R = \frac{dy}{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}$; donc $\frac{Ydx - Xdy}{ds} = \frac{2gv}{R}$. D'où il suit que *la ligne de la plus vîte descente est celle sur laquelle la force centrifuge est égale à la force normale; ensorte que la pression totale sur la courbe est double de l'une ou de l'autre de ces forces.*

442. Cette derniere conclusion est le Théorême que M. Euler propose dans sa Méchanique, pour la recherche générale des Brachistochrones. Mais cette propriété ne s'étend pas aux milieux résistants, parce que la vîtesse en M'' pour parcourir l'arc $M''B$ n'est plus la même, quelle que soit la variation du point M'. Il faut donc calculer l'augmen-

tation du temps par tout l'arc $MM'M'' + M''B$, ce qui rend cette recherche beaucoup plus difficile.

Ainſi pour déduire de cette ſolution générale celle du cas précédent, il faut ſuppoſer $X = o$ & $Y = g$; ce qui donnera $v = y$, & $\frac{dx}{ds} = \frac{2y}{R} = \frac{2yd\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dy}$. Donc $\frac{dy}{2y} = d\left(\frac{dx}{ds}\right) : \frac{dx}{ds}$; & en intégrant, $\frac{1}{2} Ly = L\frac{dx}{ds} + \frac{1}{2} La$, ou $y = \frac{a\,dx^2}{ds^2}$; d'où l'on tire auſſi-tôt, $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(a-y)}}$, comme nous l'avions déja trouvé (438).] *

SECTION III.

Du Mouvement des Corps qui agissent les uns sur les autres d'une maniere quelconque.

Dans les deux premieres Sections de la Dynamique, nous avons ſuppoſé que les mobiles étoient des points iſolés qui pouvoient obéir librement à toute ſorte de puiſſances. Maintenant nous allons nous occuper à déterminer leur mouvement, en ſuppoſant qu'ils agiſſent les uns ſur les autres, ſoit par la collision, ſoit par les liens qui les uniſſent.

Article I.

Du Mouvement des Corps qui ſe choquent.

443. Quoiqu'on ne connoiſſe pas de corps parfaite-

ment *dur*, ni de corps parfaitement *élastique*, on est obligé cependant d'en supposer l'existence, pour établir une théorie générale des loix du mouvement, dans le cas du choc. Aussi ne doit-on compter que sur des approximations plus ou moins grandes, dans l'application de ces loix, suivant que les corps approchent plus ou moins d'une dureté ou d'une élasticité parfaite.

Pour qu'ils fussent parfaitement durs, il faudroit qu'aucune espece de choc ne pût les comprimer, ni altérer en rien leur figure. Pour qu'un corps fût parfaitement élastique, il faudroit qu'à l'instant même où la compression cesse, l'élasticité le rétablît dans son premier état. Mais encore une fois on ne connoît aucun corps d'un volume fini qui aye l'une ou l'autre de ces propriétés. Le diamant est très-dur, l'ivoire est très-élastique ; ce ne sont pourtant-là que des modeles imparfaits.

Quoi qu'il en soit, après avoir posé le principe que M. d'Alembert a donné dans son Traité de Dynamique, pour déterminer le mouvement de plusieurs corps qui agissent d'une maniere quelconque les uns sur les autres, nous l'appliquerons au choc des corps & au mouvement du centre de gravité de leur systême.

444. Soient *A*, *B*, *C* &c les particules d'un systême quelconque, auxquelles on imprime respectivement les mouvements *a*, *b*, *c* &c. Comme ces particules ne sont pas libres, supposons qu'elles changent les mouvements reçus en d'autres a, b, c &c. On pourra concevoir que les

mouvements imprimés *a*, *b*, *c* &c sont composés chacun de deux autres mouvements, l'un a, ou b, ou c, &c que chaque particule aura pris d'elle-même, l'autre α, ou β, ou κ &c. Les premiers de ces mouvements a, b, c &c ont leur entier effet, sans que la liaison du système puisse les troubler en rien; car telle est la supposition. Les autres α, β, κ &c n'ayant point altéré les premiers, doivent s'être détruits mutuellement. Ils sont donc combinés de maniere à laisser tout le système en équilibre, si les particules n'étoient pas animées d'autres mouvements. Et delà résulte le principe suivant pour trouver le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres.

PRINCIPE FONDAMENTAL.

Si on décompose les mouvements a, b, c &c imprimés à différentes parties d'un même système, chacun en deux autres a, α; b, β; c, κ &c, *tels qu'en ne donnant à ces corps que les mouvements* a, b, c, &c, *ils les eussent conservés, sans se nuire mutuellement, & qu'en ne leur imprimant que les mouvements* α, β, κ, &c, *tout le système fût resté en repos, alors on aura* a, b, c *pour les mouvements que ces corps prendront en vertu de l'action réciproque qu'ils exercent les uns sur les autres.*

445. Ce principe également simple & fécond, s'étend à toutes les théories que nous allons développer, en commençant par les loix du choc des corps durs. Nous supposons que les centres de gravité de deux corps qui se choquent, se meuvent sur la même ligne, & que le plan qui

touche leurs ſurfaces au point où ils ſe rencontrent eſt perpendiculaire à la direction de leur mouvement. Cette double ſuppoſition entraîne un choc toujours direct, & exclud par conſéquent tout mouvement de rotation.

446. Cela poſé, ſoient deux corps durs M & m mûs dans le même ſens avec des vîteſſes V & v qui par le choc ſe changent en u & u'. On pourra, ſuivant le principe fondamental, conſidérer à l'inſtant du choc les corps M & m comme animés des vîteſſes u & u' qu'ils conſerveront après le choc, & des vîteſſes $V - u$, $v - u'$ qui ſeront détruites. Or les vîteſſes u & u' ne doivent pas ſe nuire réciproquement, ſuivant le même principe; elles ſont donc égales, puiſque le corps qui choque n'a d'action ſur le corps choqué que juſqu'au moment où leurs vîteſſes ſont égales. On a donc $u = u'$.

On a auſſi un parfait équilibre entre le corps M animé de la vîteſſe $V - u$ & le corps m animé de la vîteſſe $u' - v$ en ſens contraire. Donc $M(V - u) = m(u - v)$, ce qui donne $u = \frac{MV + mv}{M + m}$.

447. Cette formule fait voir que *la vîteſſe commune aux deux mobiles après le choc, ſe trouve en diviſant par la ſomme de leurs maſſes la ſomme des quantités de mouvement qu'ils avoient avant le choc.*

Il ſuit delà que dans l'hypotheſe préſente la ſomme des quantités de mouvement eſt la même avant & après le choc. L'un gagne par la colliſion, ce que l'autre a perdu par l'inertie,

Si

Si les deux mobiles alloient en ſens contraires, on feroit v négatif dans la formule précédente, & on auroit alors $u = \frac{MV - mv}{M + m}$; c'eſt-à-dire que pour connoître la vîteſſe commune après le choc, il faudroit diviſer par la ſomme des maſſes la différence des quantités de mouvement avant le choc.

Et ſi l'un des deux corps, m par exemple, étoit en repos, on auroit $v = 0$, ce qui donneroit $u = \frac{MV}{M + m}$. D'où il ſuit qu'il y aura toujours communication de mouvement; quelques petites que ſoient la vîteſſe & la maſſe du corps choquant. Ainſi la moindre force finie peut vaincre la force d'inertie de la plus grande maſſe.

Pour donner un exemple de ces formules, ſoient deux corps durs dont l'un M peſe 5 livres, & l'autre m en peſe 3, mûs dans le même ſens avec des vîteſſes reſpectives qui faſſent parcourir 9 pieds par ſeconde au premier, & 1 pied par ſeconde au dernier. On aura, en ſubſtituant ces valeurs, $u = \frac{5 \cdot 9 + 3 \cdot 1}{5 + 3} = 6$; c'eſt-à-dire que les deux mobiles auront après le choc une vîteſſe de 6 pieds par ſeconde. Elle n'eût été que de 5 pieds $\frac{1}{4}$, ſi leur mouvement avoit été en ſens contraires; & ſi le corps m eût été en repos, elle eût ſuffi pour leur faire parcourir 5 pieds $\frac{5}{8}$ après la colliſion.

448. Si les deux mobiles M & m ſont élaſtiques, ils ſe comprimeront d'abord l'un l'autre, juſqu'à ce que leurs centres de gravité & le point de contact ayent une égale vîteſſe que nous déſignerons par u. Mais auſſi-tôt que

la compreſſion n'aura plus lieu, les deux corps ſe ſerviront mutuellement d'appui inébranlable, & leur reſſort déployant alors des forces égales à celles du choc, imprimera aux deux mobiles la même quantité de mouvement avec laquelle ils ont été comprimés. En vertu de cette réaction, les deux mobiles tendront à s'écarter l'un de l'autre.

Donc s'ils ſe meuvent dans le même ſens, auquel cas on a $u = \frac{MV + mv}{M + m}$, la force avec laquelle le corps choquant comprimera le corps choqué étant exprimée par $M(V - u)$, cette force lui ſera reſtituée en ſens contraire par l'élaſticité. Il n'aura donc après le choc que la vîteſſe u diminuée de $V - u$, c'eſt-à-dire la vîteſſe $2u - V$.

Le corps choqué gagnant au contraire par la compreſſion la vîteſſe $u - v$, & l'élaſticité lui donnant la même vîteſſe dans le même ſens, il doit ſe mouvoir après le choc avec une vîteſſe u augmentée de $u - v$, qui ſe réduit à $2u - v$. Pour trouver donc la vîteſſe de chacun de ces deux corps après le choc, il faut retrancher leur vîteſſe primitive du double de la vîteſſe u qu'ils auroient eue comme corps durs.

Si on les ſuppoſoit mûs en ſens contraires, on auroit (en prenant toujours MV pour la plus grande quantité de mouvement) $u = \frac{MV - mv}{M + m}$; & la vîteſſe du corps M après le choc feroit à l'ordinaire $2u - V$, pendant que celle du corps m feroit $2u + v$, ce qui ſe déduit auſſi du cas précédent, en faiſant v négatif.

449. Appellons V' la vîteſſe de M après le choc, &

v' celle de m, & nous aurons en ſuppoſant que les deux corps vont dans le même ſens,

$$V' = \frac{2MV + 2mv}{M+m} - V = \frac{(M-m)V + 2mv}{M+m}$$

$$v' = \frac{2MV + 2mv}{M+m} - v = \frac{(m-M)v' + 2MV}{M+m}$$

ce qui fait voir que la ſomme des quantités de mouvement eſt la même, ſoit avant ſoit après le choc. Mais ſi les deux mobiles alloient en ſens contraires, on auroit pareillement

$$V' = \frac{2MV - 2mv}{M+m} - V = \frac{(M-m)V - 2mv}{M+m}$$

$$v' = \frac{2MV - 2mv}{M+m} + v = \frac{(M-m)v + 2MV}{M+m}.$$

450. Dans les deux cas on aura l'équation $MV^2 + mv^2 = MV'^2 + mv'^2$. Or le produit de la maſſe d'un corps par le quarré de ſa vîteſſe, étant appellé par Leibnitz la force vive de ce corps, on peut dire en ce ſens que dans le choc des corps élaſtiques, la ſomme des forces vives eſt la même avant & après le choc. On peut donc regarder les loix du choc des corps élaſtiques comme renfermées dans ces deux équations fort ſimples

$$MV^2 + mv^2 = MV'^2 + mv'^2 \ldots MV \pm mv = MV' + mv'.$$

D'où on déduit une équation encore plus ſimple, $V + V' = \pm v + v'$.

Si on ſuppoſe que le corps choqué m eſt en repos, & que ſa maſſe eſt égale à celle du corps M, on a $M = m$ & $v = 0$; ce qui donne $V' = 0$, & $v' = V$. Le corps choquant reſtera donc en repos, pendant que le corps choqué aura toute la vîteſſe du corps M; & c'eſt auſſi ce

qu'une expérience journaliere vérifie, toutes les fois qu'une bille de billard frappe une autre bille bien pleine.

451. Si on suppose plusieurs corps élastiques, égaux, contigus les uns aux autres, qui ayent tous leur centre sur une même ligne, alors le mouvement imprimé au premier de ces corps passe dans l'instant même au dernier, par l'entremise de ceux qui les séparent; & pendant que celui-ci seul se meut avec la vîtesse imprimée, les autres restent immobiles.

Mais si on faisoit mouvoir les deux premiers ensemble; alors les deux derniers seuls se détacheroient de la file avec la même vîtesse que les premiers avoient avant le choc. La raison en est que le second corps frappant d'abord le troisieme, lui communique sa vîtesse qui passe aussi-tôt au dernier, & qui se détache des autres: mais comme en transmettant sa vîtesse au troisieme, le second se comprime des deux côtés, il se sépare un moment du premier qui vient ensuite produire le même effet que le second, en détachant l'avant-dernier. En général, il y a autant de corps qui se détachent de ceux qui les précedent, qu'il y a de corps poussés ensemble contre la file des autres.

Si deux corps élastiques M & m se meuvent en sens contraires, l'un M avec une vîtesse de 7 pieds par seconde, l'autre m avec une vîtesse de 3 pieds & une masse triple de M, on aura $m = 3M$, $V = 7$, $v = 3$; & substituant ces valeurs dans la formule du second cas, on trouvera $V' = -8$ & $v' = 2$. Ces deux mobiles retourneront donc sur leurs pas avec des vîtesses respectives de 8 & de 2 pieds

par ſeconde. On peut voir d'autres applications dans 'sGraveſande, *Phyſices Elementa Mathem.* L. II. Cap. VI.

Nous n'avons ſuppoſé de choc juſqu'ici qu'entre deux corps ſeulement ; s'il y en avoit pluſieurs à la fois, le problême ſuivant feroit connoître la maniere de déterminer leur mouvement.

PROBLEME.

452. ÉTANT donné un corps ſphérique C mû ſuivant la ligne CI avec la vîteſſe $CD = V$, lequel rencontre à la fois les deux corps en repos A & B, on demande les vîteſſes de ces trois corps, & la direction de C après le choc. Fig. 166.

Soit CEK la direction du corps C après le choc ; ſoit CE la vîteſſe qu'il aura dans cette nouvelle direction. On décompoſera la vîteſſe primitive CD en deux autres dont une CE qui aura ſon effet, & une autre CF qui ſera détruite. Or la vîteſſe CE ne devant pas nuire à celles que prendront les deux corps A & B, ſi on mene les perpendiculaires EG, EH ſur les rayons CA, CB, il eſt clair que CG repréſentera la vîteſſe du point de contact A ſuivant CA, & par conſéquent celle du corps A : on aura de même CH pour exprimer la vîteſſe du corps B. On peut donc à l'inſtant du choc conſidérer les corps C, A, B, comme étant animés reſpectivement des vîteſſes CE, CG, CH qu'ils conſerveront ſans ſe nuire, & des vîteſſes CF, $-CG$, $-CH$ avec leſquelles ils doivent ſe faire équilibre.

Soit l'angle ACI ou l'arc $AI = \alpha$, l'arc $BI = \epsilon$, l'arc

$KI = \varphi$, $DC = V$, $CE = V'$; on aura $CG = V' \cos(\alpha - \varphi)$, & $CH = V' \cos(\beta + \varphi)$. Mais puiſque les forces $C.CF$, $A.CG$, $B.CH$ dirigées ſuivant CF, AC, BC ſe font équilibre, ſi on les décompoſe chacune en deux autres ſuivant CD & perpendiculairement à CD, la ſomme des premieres & celle des dernieres doivent ſe réduire à zéro. On aura donc les équations ſuivantes

$$C.CF.\cos FCD - B.CH.\cos BCI - A.CG.\cos ACI = 0$$
$$C.CF.\sin FCD - B.CH.\sin BCI + A.CG.\sin ACI = 0.$$

Or $CF.\cos FCD = CD - CE \cos ICK = V - V' \cos\varphi$; & $CF.\sin FCD = CE \sin ICK = V' \sin\varphi$; donc en ſubſtituant ces valeurs on aura,

$$C(V - V' \cos\varphi) - BV' \cos\beta \cos(\beta + \varphi) - AV' \cos\alpha \cos(\alpha - \varphi) = 0$$
$$CV' \sin\varphi - BV' \sin\beta \cos(\beta + \varphi) + AV' \sin\alpha \cos(\alpha - \varphi) = 0.$$

La derniere donne $C \sin\varphi - B \sin\beta (\cos\beta \cos\varphi - \sin\beta \sin\varphi) + A \sin\alpha (\cos\alpha \cos\varphi + \sin\alpha \sin\varphi) = 0$; & par conſéquent

$$\tang \varphi = \frac{\frac{1}{2} B \sin 2\beta - \frac{1}{2} A \sin 2\alpha}{C + B \sin^2\beta + A \sin^2\alpha}.$$

On connoîtra donc la direction que le corps C doit ſuivre après le choc. Pour connoître ſa vîteſſe, on déduira la valeur de V' de la premiere équation qui donne

$$V' = \frac{CV}{C \cos\varphi + B \cos\beta \cos(\beta + \varphi) + A \cos\alpha \cos(\alpha - \varphi)}.$$

Quant à la vîteſſe du corps A ſuivant CA, elle eſt $V' \cos(\alpha - \varphi) = \frac{CC \cos\alpha + CB \sin\beta \sin(\alpha + \beta)}{C(A + B + C) + AB \sin^2(\alpha + \beta)}$,

Et celle du corps B ſuivant CB eſt $V' \cos(\beta + \varphi) =$

$$\frac{CC \cos \beta + CA \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{C(A+B+C) + AB \sin^2(\alpha + \beta)}$$

Quel que ſoit le nombre des corps on pourra toujours réſoudre le problême d'une maniere ſemblable.

Du Mouvement du centre de gravité commun de pluſieurs Corps.

453. On a vû dans la Statique que ſi les diverſes parties d'un ſyſtême ſont parfaitement libres, les mouvements que l'on imprime à chacune en particulier ſe tranſmettent tous au centre de gravité, ſuivant des directions paralleles, d'où on a conclu que ce centre devoit ſe mouvoir, comme ſi toutes les puiſſances lui étoient immédiatement appliquées. Nous allons prouver maintenant que la même choſe a lieu, quand toutes les parties du ſyſtême ſont liées entr'elles, de maniere cependant que le ſyſtême ſoit libre, ou qu'il ne ſoit pas aſſujetti à ſe mouvoir autour d'un point fixe.

Les mouvements a, b, c &c, que les parties du ſyſtême doivent prendre, peuvent ſe décompoſer en deux, ſavoir les mouvements imprimés *a*, *b*, *c* &c, & les mouvements détruits $-\alpha$, $-\beta$, $-\kappa$ &c. A raiſon de ces derniers, il doit y avoir équilibre; donc le centre de gravité n'en peut être affecté; & par conſéquent la route que ce centre doit ſuivre en vertu des mouvemens a, b, c que les parties du ſyſtême ont pris par leur action mutuelle, doit être préciſément la même que celle qu'il auroit ſuivie en vertu des mouvements *a*, *b*, *c* que ces parties auroient eu, ſi elles euſſent été libres.

454. Il suit delà que *l'état de mouvement ou de repos du centre de gravité commun de plusieurs corps ne change point par l'action mutuelle de ces mêmes corps, pourvû que le systême soit libre.*

Fig. 169. Si un corps quelconque M reçoit une impulsion suivant une droite AB qui ne passe pas par son centre de gravité G, ce centre se mouvra, comme si la puissance AB lui étoit appliquée suivant une direction parallele GD; il resteroit donc en repos, si on lui appliquoit en sens contraire une puissance GD' égale à AB. Cependant les deux puissances GD' & AB quoiqu'égales, ne sont pas directement opposées, & ne peuvent par conséquent pas se détruire. D'ailleurs le point G étant en repos, le seul mouvement que puisse prendre le corps, est un mouvement de rotation autour de ce point.

455. Donc si un corps quelconque est sollicité par des puissances dont les directions ne passent pas par son centre de gravité, on doit conclure 1°, que ce centre sera mû comme si toutes ces puissances lui étoient appliquées suivant des directions paralleles. 2°, Que les autres parties du corps tourneront autour du centre de gravité, comme elles l'auroient fait en vertu des mêmes puissances, si ce point eût été absolument fixe.

456. Le mouvement du centre de gravité s'appelle *le Mouvement progressif*; & comme il est commun à toutes les parties du corps, de quelque maniere qu'il se meuve, on pourra toujours regarder le mouvement de chaque partie, comme composé de deux autres, l'un progressif, le même

même pour toutes les parties, égal & parallele à celui du centre de gravité, l'autre de rotation autour de ce centre.

Or le mouvement progressif étant celui que prend un point sollicité par des puissances quelconques, peut se déterminer par les principes exposés dans la premiere Partie. Reste donc que pour trouver le mouvement d'un corps, il faut encore déterminer son mouvement de rotation autour du centre de gravité. Nous en donnerons bientôt la méthode.

Autre application du Principe général au mouvement qui se fait dans les Machines.

457. Comme l'action réciproque que plusieurs corps liés entr'eux exercent les uns sur les autres, se fait principalement remarquer dans les machines, il importe d'en connoître les effets. Soit donc proposé d'abord de déterminer le mouvement de deux corps M & m attachés à un fil MCm qui passe par-dessus la poulie C. Fig. 170.

J'appelle p la force accélératrice du corps M, & je remarque que cette force seroit la gravité g toute entiere, si le corps m n'agissoit pas sur le corps M: la force accélératrice de m sera aussi la quantité p, mais son action se fera en sens contraire suivant la direction ma. Ainsi on peut regarder le corps M comme animé de la force accélératrice p qu'il conservera, & de la force $g-p$ qui sera détruite. Le corps m peut être considéré pareillement comme animé suivant ma de la force p qu'il conservera, & de la force $g+p$ qui sera détruite.

Cela posé, les deux mobiles animés seulement des forces accélératrices ou des vîtesses $g - p$ & $g + p$ devant se faire équilibre, on aura par la propriété de la poulie, $M(g-p) = m(g+p)$, & par conséquent $p = \frac{M-m}{M+m} g$; ce qui détermine la force accélératrice des deux corps. Mais cette force étant constante, il s'ensuit qu'ils sont mûs l'un & l'autre d'un mouvement uniformément accéléré, la vîtesse au bout du temps t étant $\frac{M-m}{M+m} g t$, & l'espace parcouru étant $\frac{M-m}{M+m} \cdot \frac{1}{2} g t^2$.

458. Si on suppose que le fil $MACam$ est uniformément pesant, alors le mouvement deviendra très-différent. Pour le déterminer, soit $AM = x$, $am = a - x$, & la pesanteur spécifique du fil $= f$. Le poids de la partie AM sera fx, celui de la partie am sera $f(a - x)$. Donc la force accélératrice du corps M aura pour expression . . . . . $\frac{M-m+fx-f(a-x)}{M+m+fx+f(a-x)} g = \frac{M-m-fa+2fx}{M+m+fa} g$.

Et si pour abréger, on fait $\frac{M-m-fa}{M+m+fa} = \alpha$, $\frac{2f}{M+m+fa} = \mathcal{C}$, cette même force sera exprimée par $(\alpha + \mathcal{C} x) g$. Appellant donc u la vîtesse, on aura l'équation $u\,du = g\,dx\,(\alpha + \mathcal{C} x)$, dont l'intégrale est $uu = g(\mathcal{C} xx + 2\alpha x)$; & puisque je n'ajoute pas de constante, je suppose tacitement que l'origine des x est prise, non au point A, mais au point D où le mouvement a commencé. La vîtesse étant ainsi déterminée, il faut chercher le temps employé à parcourir l'espace x. On le trouvera en intégrant l'équation $dt\sqrt{g} = \frac{dx}{\sqrt{(\mathcal{C} xx + 2\alpha x)}}$, qui donne

$$t\sqrt{\mathcal{C} g} = L\left[\frac{\alpha + \mathcal{C} x + \sqrt{(\mathcal{C}^2 x^2 + 2\alpha \mathcal{C} x)}}{\alpha}\right].$$

459. Maintenant considérons le mouvement d'un corps M qui en feroit monter un autre m attaché à la poulie mobile B, par le moyen de la poulie fixe A, les trois cordons étant paralleles. Fig. 171.

Soit p la force accélératrice de M, $\frac{1}{2}p$ sera celle de m. On pourra donc concevoir les corps M & m comme animés des forces accélératrices p & $-\frac{1}{2}p$ qu'ils conserveront, & des forces $g-p$, $g+\frac{1}{2}p$ avec lesquelles ils doivent se faire équilibre. Donc par la propriété des poulies mobiles on aura $2M(g-p)=m(g+\frac{1}{2}p)$, d'où on déduira $p=\frac{4M-2m}{4M+m}g$. Le mouvement des deux corps sera donc uniformément accéléré.

La force accélératrice de m sera $\frac{2M-m}{4M+m}g$, & sa quantité de mouvement au bout d'un temps quelconque t aura pour valeur $\frac{2Mm-mm}{4M+m}gt$. Si on proposoit donc de trouver le rapport entre M & m pour que la quantité de mouvement communiquée à m fût la plus grande qu'il est possible, il faudroit faire ensorte que $\frac{2Mm-mm}{4M+m}$ fût un *Maximum*. Différentiant alors cette expression en faisant varier m, on aura $2Mm-mm=(4M+m)(2M-2m)$, ou $8M^2-8Mm-m^2=0$. Ainsi le rapport cherché $\frac{m}{M}=-4+\sqrt{24}=\frac{9}{10}$ à peu-près.

460. Soit proposé ensuite de déterminer le mouvement d'un poids M appliqué à la roue ABC d'un treuil, & entraînant le poids m appliqué au cylindre cba. Fig. 172.

J'appelle R le rayon de la roue, r celui du cylindre, & p la force accélératrice de M; $\frac{pr}{R}$ sera celle de m. Cela posé,

en suivant toujours le principe général, je regarde les poids M, m comme animés des forces accélératrices p, $-\frac{pr}{R}$ qu'ils conserveront, & des forces $g-p$, $g+\frac{pr}{R}$ qui seront détruites. Les moments de celles-ci devant être égaux, on aura $MR\,(g-p)=mr\left(g+\frac{pr}{R}\right)$; d'où résulte $p=\frac{MR-mr}{MR^2+mr^2}\,Rg$. Ainsi le mouvement de ces deux poids sera uniformément accéléré. La vîtesse du corps M au bout du temps t est $u=\frac{MR^2-mRr}{MR^2+mr^2}\,gt$, & l'espace parcouru $=\frac{MR^2-mRr}{MR^2+mr^2}\cdot\frac{1}{2}gt^2$. Il est clair qu'il n'y auroit pas de mouvement, si on avoit $MR=mr$; c'est aussi la condition de l'équilibre; & si $MR<mr$, le poids M monteroit au lieu de descendre, comme cela est encore évident.

La vîtesse du poids m sera pareillement $\frac{MRr-mr^2}{MR^2+mr^2}\,gt$, & l'espace qu'il parcourra en montant sera $\frac{MRr-mrr}{MR^2+mr^2}\cdot\frac{1}{2}gt^2$. Si on propose donc de trouver le rapport qu'il doit y avoir entre R & r, pour que le poids m soit élevé le plus promptement qu'il est possible, il faudra faire ensorte que $\frac{MRr-mr^2}{MR^2+mr^2}$ soit un *Maximum*. On différentiera cette quantité en faisant varier $\frac{r}{R}$ ou simplement R, & on aura $(MRr-mr^2)\,2MR=(MR^2+mr^2)\;Mr$, ou $MR^2-2mrR=mr^2$; ce qui donne pour le rapport cherché, $\frac{R}{r}=\frac{m}{M}+\sqrt{\left(\frac{m^2}{M^2}+\frac{m}{M}\right)}$. Par exemple, si $m:M::144:25$, on trouvera $R=12r$; c'est-à-dire que pour élever le poids m le plus promptement qu'il est possible, dans ce cas-là, il faut que le rayon de la roue soit douze fois plus grand que celui du cylindre.

461. Mais si on suppose que le poids M parcourt un

eſpace limité, & ſi on demande le rapport des rayons R & r tel que le poids m pârcoure le plus grand eſpace poſſible dans le moindre temps, il faudra que cet eſpace diviſé par t, ou $\frac{MRr - mr^2}{MR^2 + mr^2} \cdot \frac{1}{2} g t$ ſoit un *Maximum.* Or dans la ſuppoſition préſente l'eſpace parcouru par le poids M, ou $\frac{MR^2 - mRr}{MR^2 + mr^2} \cdot \frac{1}{2} g t^2$ eſt donné : ainſi t eſt proportionnel à $\sqrt{\left(\frac{MR^2 + mr^2}{MR^2 - mrR}\right)}$; & par conſéquent $\left(\frac{MRr - mr^2}{MR^2 + mr^2}\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{MR^2 + mr^2}{MR^2 - mRr}\right)} = Max.$ ainſi que $\frac{r^2 (MR - mr)}{R(MR^2 + mr^2)}$. Cette derniere expreſſion étant différentiée en faiſant varier R ou r ou $\frac{r}{R}$, on parviendra également à l'équation cubique $m^2 r^3 + 3 m M R^2 r = 2 M^2 R^3$ qui n'a qu'une racine réelle dont la valeur eſt

$$\frac{r}{R} = \sqrt[3]{\left[\frac{M^2}{m^2} + \frac{M}{m}\sqrt{\left(\frac{M^2}{m^2} + \frac{M}{m}\right)}\right]} + \sqrt[3]{\left[\frac{M^2}{m^2} - \frac{M}{m}\sqrt{\left(\frac{M^2}{m^2} + \frac{M}{m}\right)}\right]}.$$

Enſorte que ſi $m : M :: 2197 : 400$, ou ſi $\frac{m}{M} = 5,4925$, on trouvera $\frac{R}{r} = 8,45$; ou $R : r :: 169 : 20$.

462. Conſidérons à préſent le mouvement d'un corps M qui à l'aide d'un fil MDm paſſant par-deſſus la poulie fixe D, entraîneroit le corps m poſé ſur le plan incliné AC, que nous ſuppoſerons parallele au cordon Dm. Fig. 173.

Soit c l'angle ACB, ou l'inclinaiſon du plan avec l'horizon ; ſoit p la force accélératrice du poids M. Cette force ſera la même pour m, & on pourra regarder les corps M, m comme animés des forces accélératrices p, & $-p$ qui ſubſiſteront, & des forces accélératrices $g - p$, & $g \sin c + p$ qui ſeront détruites.

Comme ces dernieres forces s'exercent suivant DM & Dm, les quantités de mouvement qui en résultent doivent être égales. Ainsi $M(g - p) = m(g \sin C + p)$; & par conséquent $p = \frac{M - m \sin C}{M + m} g$. D'où on inférera que le mouvement des deux corps M & m est uniformément accéléré. La vîtesse au bout du temps t sera $\frac{M - m \sin C}{M + m} gt$, & l'espace parcouru aura pour valeur $\frac{M - m \sin C}{M + m} \cdot \frac{1}{2} gt^2$. La quantité de mouvement du corps m étant $\frac{Mm - m^2 \sin C}{M + m} gt$, il faut pour qu'elle soit un *Maximum*, que $\frac{M}{m} = -1 + \sqrt{\left(\frac{1}{\sin C} + 1\right)}$.

ARTICLE II.

Du Mouvement de plusieurs Corps considérés comme des points qui se tiennent par des fils ou des verges inflexibles.

PROBLÊME I.

FIG. 174. 463. DEUX corps M & N étant attachés ensemble par un fil inextensible MN ou par une verge sans masse, déterminer leur mouvement.

Soient mM & nN les éléments que viennent de décrire les corps M & N dans l'instant dt; s'ils étoient libres, ils décriroient dans l'instant suivant les éléments Mm', Nn' égaux aux précédents & dans la même direction. Supposons donc qu'en vertu de leur action mutuelle, ils parviennent l'un en μ, l'autre en ν, on pourra supposer que les mouvements Mm' & Nn' que les corps auroient s'ils

étoient libres, sont décomposés chacun en deux autres, l'un $M\mu$ & $N\nu$ qu'ils conserveront, l'autre Mm & Nn qui sera détruit. Il faut pour cela que Mm & Nn soient situés dans la direction de MN, & que $M . M$m $= N . N$n.

Rapportons maintenant les deux trajectoires à l'axe APQ, & supposons $AP = x$, $PM = y$, $MN = a$, $AQ = x'$, $NQ = y'$. La force accélératrice du corps M suivant m M, qui résulte de l'action du corps N, étant appellée φ, celle du corps N qui résulte de l'action du corps M suivant n N sera exprimée par $\frac{\varphi . M}{N}$.

Cela posé, la force φ se décompose en deux, l'une parallele à AP, & sa valeur est $\frac{\varphi (x' - x)}{a}$, l'autre suivant MP, & celle-ci est $\frac{\varphi (y - y')}{a}$. On aura donc pour le corps M, les deux équations suivantes,

$$\frac{x' - x}{a} \varphi\, dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right) \; \ldots \; \frac{y' - y}{a} \varphi\, dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

On aura de même pour le corps N

$$\frac{x' - x}{a} \varphi\, dt . \frac{M}{N} = - d\left(\frac{dx'}{dt}\right) \ldots \frac{y' - y}{a} \varphi\, dt . \frac{M}{N} = - d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$$

D'où on déduit

$$M d\left(\frac{dx}{dt}\right) + N d\left(\frac{dx'}{dt}\right) = 0 \ldots M d\left(\frac{dy}{dt}\right) + N d\left(\frac{dy'}{dt}\right) = 0\,;$$

ce qui donne en intégrant,

$$M . \frac{dx}{dt} + N . \frac{dx'}{dt} = C \ldots M . \frac{dy}{dt} + N . \frac{dy'}{dt} = C'$$

Il suit de ces deux intégrales que le mouvement du centre de gravité est uniforme & rectiligne ; ce qui s'accorde avec le principe démontré ci-dessus, que l'état du centre de gra-

vité ne change point par l'action mutuelle des parties du syſtême.

Pendant que le centre de gravité ſe meut uniformément & en ligne droite, les corps M & m décrivent néceſſairement autour de lui des circonférences de cercle, & ils les décrivent uniformément, comme il eſt facile de le démontrer par ce qui a été dit dans le calcul des attractions. On voit évidemment d'ailleurs qu'aucune force accélératrice perpendiculaire à MN n'exiſtant dans le ſyſtême, la vîteſſe angulaire autour de G ne peut être altérée.

Nous remarquerons en paſſant, que des quatre équations précédentes on peut déduire celle-ci,

$$\frac{Mdx}{dt} d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{Mdy}{dt} d\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{Ndx'}{dt} d\left(\frac{dx'}{dt}\right) + \frac{Ndy'}{dt} d\left(\frac{dy'}{dt}\right) = 0$$

dont l'intégrale eſt $M . \frac{ds^2}{dt^2} + N \cdot \frac{ds'^2}{dt^2} = MV^2 + NV'^2$, en appellant V & V' les vîteſſes initiales de M & de N; d'où il ſuit que *la ſomme des forces vives reſte toujours la même.*

PROBLÊME II.

FIG. 174. 464. LES mêmes choſes étant poſées que dans le problême qui précéde, & ſuppoſant de plus que les corps M & N ſont ſoumis à l'action d'une force accélératrice conſtante, comme la gravité g, ſuivant les ordonnées MP, NQ; déterminer le mouvement de ces corps.

Les forces accélératrices ſuivant PM & NQ étant diminuées de la quantité g, on aura les quatre équations du mouvement

$\frac{x'-x}{a}$

$$\frac{x'-x}{a}\,\varphi\,dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right) \ldots \frac{y'-y}{a}\,\varphi\,dt - g\,dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{x'-x}{a}\,\varphi\,dt\,.\,\frac{M}{N} = -d\left(\frac{dx'}{dt}\right) \ldots \frac{y'-y}{a}\,\varphi\,dt\,\frac{M}{N} + g\,dt = -d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$$

Et on en déduira d'abord $Md\left(\frac{dx}{dt}\right) + Nd\left(\frac{dx'}{dt}\right) = 0$. Ainſi le mouvement horizontal du centre de gravité eſt toujours uniforme. On aura enſuite $Md\left(\frac{d}{dt}\right) + Nd\left(\frac{dy'}{dt}\right) = -g\,dt\,(M+N)$. Or $\left(\frac{M\,dy}{dt} + \frac{N\,dy'}{dt}\right) : (M+N)$ étant la vîteſſe verticale du centre de gravité, on aura en appellant v cette vîteſſe, $dv = -g\,dt$. D'où il ſuit que le centre de gravité ſe meut préciſément comme un point libre, & qu'il décrit par conſéquent une parabole, pendant que les deux corps M & N décrivent autour de lui des circonférences de cercle d'un mouvement uniforme.

PROBLÊME III.

465. Les trois corps B, C, D étant attachés au fil BCD, & ayant reçu des impulſions quelconques, déterminer leur mouvement. Fig. 175.

Suppoſons que dans l'inſtant dt ces corps viennent de décrire des parties infiniment petites bB, cC, dD de leurs trajectoires. S'ils devenoient libres, ils décriroient dans l'inſtant ſuivant les lignes Bb', Cc', Dd' égales aux précédentes & dans la même direction. S'ils ſont donc obligés par leur action mutuelle de décrire $B\beta$, $C\kappa$, $D\delta$, on pourra regarder, ſuivant le principe général, les vîteſſes imprimées Bb', Cc', Dd' comme compoſées des vîteſſes $B\beta$, $C\kappa$, $D\delta$

qu'ils conservent réellement, & des vîtesses Bb, Cc, Dd avec lesquelles ils se font équilibre. Pour cela, il faut que Bb, Dd se trouvent dans la direction des fils BC, DC, & qu'en formant le parallélogramme $Ce\ cf$, on ait $C \,.\, Ce = B \,.\, Eb$, & $C . Cf = D \,.\, Dd$. Donc si on appelle φ la force accélératrice de B qui résulte de l'action du corps C suivant BC, & ψ celle de D suivant DC, on aura pour le corps C deux forces accélératrices, l'une suivant $CB = \frac{B\varphi}{C}$, l'autre suivant $CD = \frac{D\psi}{C}$.

Rapportons à l'axe AP les trois courbes décrites, & supposons $AP = x$, $BP = y$, $AP' = x'$, $CP' = y'$; $AP'' = x''$, $DP'' = y''$, ensorte que l'on ait $CB^2 = a^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \ldots CD^2 = b^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2$. La force φ suivant BC se décompose en deux autres, l'une suivant $PB = \frac{y' - y}{a}\varphi$, l'autre parallélement à $AP = \frac{x' - x}{a}\varphi$. Faisant de semblables décompositions pour les forces eC, fC, dD, on aura les six équations du mouvement

$$\frac{x'-x}{a}\varphi dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right) \ldots \frac{x''-x'}{b} \,.\, \frac{D}{C}\psi dt - \frac{x'-x}{a} \,.\, \frac{B}{C}\varphi dt = d\left(\frac{dx'}{dt}\right).$$

$$\frac{x''-x'}{b}\psi dt = -d\left(\frac{dx''}{dt}\right) \ldots \frac{y'-y}{a}\varphi dt = d\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{y'-y''}{b} \,.\, \frac{D}{C}\psi dt + \frac{y'-y}{a} \,.\, \frac{B}{C}\varphi dt = -d\left(\frac{dy'}{dt}\right) \ldots \frac{y'-y''}{b}\psi dt = -d\left(\frac{dy''}{dt}\right).$$

Si on multiplie la premiere par B, la seconde par C, la troisieme par $-D$, & si on ajoute les produits, on aura $Bd\left(\frac{dx}{dt}\right) + Cd\left(\frac{dx'}{dt}\right) + Dd\left(\frac{dx''}{dt}\right) = 0$. La même opération faite sur les trois dernieres équations donnera

$B\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) + C d\left(\frac{dy'}{dt}\right) + D d\left(\frac{dy''}{dt}\right) = 0$; d'où il suit que le mouvement du centre de gravité est uniforme & rectiligne, comme cela doit être. La question se réduit donc à chercher le mouvement des trois corps autour de leur centre de gravité, considéré comme fixe.

466. Supposons que la ligne AP est la direction de ce centre actuellement en G, & que γ exprime sa vîtesse ; on aura $AG = \gamma t$, au cas qu'il eût été en A au commencement du mouvement. Soit $GP = X$, $GP' = X'$, $GP'' = X''$; on aura par la propriété du centre de gravité ; $BX + CX' - DX'' = 0 \ldots By + Cy' + Dy'' = 0$ (car il faut que quelqu'une des distances y, y', y'' soit négative). On aura de plus $x = \gamma t - X \ldots x' = \gamma t - X' \ldots x'' = \gamma t + X''$; & substituant ces valeurs dans les trois premieres équations générales, il en résultera les suivantes pour déterminer le mouvement des corps autour de leur centre de gravité.

$$\frac{X-X'}{a}\varphi dt = -d\left(\frac{dX}{dt}\right) \ldots \frac{X-X'}{a}\cdot\frac{B}{C}\varphi dt - \frac{X'+X''}{b}\cdot\frac{D}{C}\psi dt = d\left(\frac{dX'}{dt}\right)$$

$$\frac{X'+X''}{b}\psi dt = -d\left(\frac{dX''}{dt}\right) \ldots \frac{y'-y}{a}\varphi dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{y'-y''}{b}\cdot\frac{D}{C}\psi dt + \frac{y'-y}{a}\cdot\frac{B}{C}\varphi dt = -d\left(\frac{dy'}{dt}\right) \ldots \frac{y'-y''}{b}\psi dt = -d\left(\frac{dy''}{dt}\right).$$

Multiplions les trois premieres respectivement par $-B\,\frac{dX}{dt}$, $C\,\frac{dX'}{dt}$, $-D\,\frac{dX''}{dt}$, & les trois dernieres par $B\frac{dy}{dt}$, $-C\frac{dy'}{dt}$, $-D\frac{dy''}{dt}$. Après quoi ajoutons tous ces produits ensemble,

en remarquant que les équations $a^2 = (y' - y)^2 + (X' - X)^2 \ldots$ $b^2 = (y'' - y')^2 + (X'' + X')^2$ donnent $(y' - y)(dy' - dy) + (X' - X)(dX' - dX) = 0 \ldots (y'' - y')(dy'' - dy') + (X'' + X')(dX'' + dX') = 0$; & nous aurons

$$B\frac{dX}{dt}d\frac{dX}{dt} + B\frac{dy}{dt}d\frac{dy}{dt} + C\frac{dX'}{dt}d\frac{dX'}{dt} + C\frac{dy'}{dt}d\frac{dy'}{dt} + D\frac{dX''}{dt}d\frac{dX''}{dt} + D\frac{dy''}{dt}d\left(\frac{dy''}{dt}\right) = 0.$$

Or l'intégrale de cette équation est

$$B\left(\frac{dX^2 + dy^2}{dt^2}\right) + C\left(\frac{dX'^2 + dy'^2}{dt^2}\right) + D\left(\frac{dX''^2 + dy''^2}{dt^2}\right) = C.$$

Ainsi la somme des forces vives est constante.

Multiplions à présent les trois premieres & les trois dernieres équations respectivement par $-By$, Cy', Dy'', $-BX$, CX', DX'' ; ajoutons les produits, & réduisons, nous aurons

$$B\left[yd\frac{dX}{dt} - Xd\frac{dy}{dt}\right] + C\left[y'd\frac{dX'}{dt} - X'd\frac{dy'}{dt}\right] - L\left[y''d\frac{dX''}{dt} - X''d\frac{dy''}{dt}\right] = 0$$

dont l'intégrale est

$$B(Xdy - ydX) + C(X'dy' - y'dX') - D(X''dy'' - y''dX'') = C''dt.$$

467. Mais pour donner à ces équations une forme plus simple, appellons φ l'angle AGB, & z le rayon GB ; soit pareillement $AGC = \varphi'$, $GC = z'$, $AGD = \varphi''$, $GD = z''$; on aura $y = z \sin\varphi$, $y' = z' \sin\varphi'$, $y'' = z'' \sin\varphi''$, $X = z \cos\varphi$, $X' = z' \cos\varphi'$, $X'' = - z'' \cos\varphi''$, $dX^2 + dy^2 = dz^2 + z^2 d\varphi^2$, $Xdy - ydX = z^2 d\varphi$; ce qui changera les deux équations intégrales en celles-ci.

$$B(dz^2 + z^2 d\varphi^2) + C(dz'^2 + z'^2 d\varphi'^2) + D(dz''^2 + z''^2 d\varphi''^2) = C'dt^2$$

$$Bz^2 d\varphi + Cz'^2 d\varphi' + Dz''^2 d\varphi'' = C''dt.$$

On a de plus les quatre équations finies

$$B z \sin \varphi + C z' \sin \varphi' + D z'' \sin \varphi'' = 0$$
$$B z \cos \varphi + C z' \cos \varphi' + D z'' \cos \varphi'' = 0$$
$$2 z z' \cos(\varphi' - \varphi) = z^2 + z'^2 - a^2$$
$$2 z' z'' \cos(\varphi'' - \varphi') = z'^2 + z''^2 - b^2.$$

Et ces six équations contiennent la solution du problême : car si on déduit des quatre dernieres les valeurs de φ, φ'', z, z'' en φ' & z', pour les substituer dans les deux équations différentielles, on aura d'abord en chassant dt une équation différentielle du premier degré entre φ' & z', qui donnera la courbe décrite par le point C autour du centre de gravité. Si on integre ensuite la valeur de dt, on aura la position de ce point au bout d'un temps quelconque ; & cette position une fois déterminée, celle des deux autres corps n'aura plus de difficulté.

Au reste, on peut satisfaire aux équations précédentes en supposant que z, z', z'', sont des quantités constantes, ainsi que $\varphi' - \varphi$, $\varphi'' - \varphi'$. Il peut donc y avoir des cas où chaque corps décriroit une circonférence de cercle autour de G avec la même vîtesse angulaire.

468. [Pour parvenir à la soluti n générale, il faut effectuer le calcul que nous venons d'indiquer. Ce calcul est fort long, mais il n'a guere d'autre difficulté : ainsi nous supprimerons les détails qui peuvent aisément se suppléer. *

Des quatre équations finies on peut déduire d'abord les deux équations suivantes

$$Bz^2 + Cz'^2 + Dz''^2 + (B+C+D)z'^2 = Ba^2 + Db^2$$
$$D^2z''^2 = (B+C)(Bz^2 + Cz'^2) - BCa^2.$$

Suppoſons pour abréger que $\frac{Ba^2(C+D)+D^2b^2}{B(B+C+D)} = m$, & que $\frac{Db^2(B+C)+B^2a^2}{D(B+C+D)} = n$, & nous aurons en ſubſtituant ces valeurs dans les deux dernieres équations

$$z^2 = m - z'^2 \cdot \frac{C+D}{B} \ldots z''^2 = n - z'^2 \cdot \frac{B+C}{D}.$$

Cela poſé, la troiſieme & quatrieme équation donneront

$$(d\varphi - d\varphi')\,fin\,(\varphi' - \varphi) = d\left(\frac{z^2 + z'^2 - a^2}{2zz'}\right)$$
$$(d\varphi' - d\varphi'')\,fin\,(\varphi'' - \varphi') = d\left(\frac{z'^2 + z''^2 - b^2}{2z'z''}\right).$$

Faiſant le calcul, & éliminant z & z'' au moyen des valeurs trouvées, on aura en ſuppoſant, pour abréger encore, que $P =$

$$\sqrt{\left[2z'^2(B^2a^2 + D^2b^2) - z'^4(B+C+D)^2 - \frac{(D^2b^2 - B^2a^2)^2}{(B+C+D)^2}\right]}.$$

$$d\varphi - d\varphi' = \frac{[D^2b^2 - Ba^2(C+D)]z'^2 + B^2(a^2m - m^2)}{Bm - z'^2(C+D)} \cdot \frac{dz'}{Pz'}$$
$$d\varphi' - d\varphi'' = \frac{[B^2a^2 - Db^2(B+C)]z'^2 + D^2(b^2n - n^2)}{Dn - z'^2(B+C)} \cdot \frac{dz'}{Pz'}.$$

Et ſi on fait par la même raiſon

$$Q = [D^2b^2 - Ba^2(C+D)]z'^2 + B^2(a^2m - m^2)$$
$$R = [B^2a^2 - Db^2(B+C)]z'^2 + D^2(an^2 - n^2)$$

on aura

$$d\varphi = d\varphi' + \frac{Qdz'}{Bz^2.Pz'} \ldots d\varphi'' = d\varphi' - \frac{Rdz'}{Dz''^2.Pz'}.$$

Cela poſé, l'équation générale $Bz^2d\varphi + Cz'^2d\varphi' +$

$D z'''^2 d\varphi'' = H dt$ (H étant une conſtante) qui exprime qu'en multipliant chaque corps par l'aire qu'il décrit autour du centre de gravité, la ſomme des produits eſt proportionnelle au temps, deviendra en éliminant z^2, z''^2, $d\varphi$, $d\varphi''$.

$$[Ba^2 + Db^2 - z'^2 (B + C + D)]\, d\varphi' + \frac{dz'}{Pz'}(Q - R) = H dt$$

ou

$$[Ba^2 + Db^2 - z'^2 (B + C + D)]\, d\varphi' + \frac{dz'}{Pz'}\Big[(Db^2 - Ba^2)(B + C + D)z'^2 + \frac{(Ba^2 + Db^2)(B^2a^2 - D^2b^2)}{B + C + D}\Big] = H dt.$$

Enſuite l'équation des forces vives, $B(dz^2 + z^2 d\varphi^2) + C(dz'^2 + z'^2 d\varphi'^2) + D(Dz''^2 + z''^2 d\varphi''^2) = KH^2 dt^2$ (K eſt une conſtante) donnera en faiſant les mêmes éliminations, $\Big[\frac{(C + D)^2 z'z'}{Bz^2} + C + \frac{(B + C)^2 z'z'}{Dz''z''}\Big] dz'^2 + \Big(\frac{Q^2}{Bz^2} + \frac{R^2}{Dz''^2}\Big)\frac{dz'^2}{P^2 z'^2} + [Ba^2 + Db^2 - z'^2 (B + C + D)]\, d\varphi'^2 + \frac{2dz'd\varphi'}{Pz'}(Q - R) = KH^2 dt^2$.

Soit $Ba^2 + Db^2 - z'^2 (B + C + D) = M$, on aura $Hdt = Md\varphi' + \frac{dz'}{Pz'}(Q - R)$; & ſubſtituant cette valeur dans l'équation précédente, afin d'éliminer dt, on aura $\Big[\frac{(C + D)^2 z'z'}{Bz^2} + C + \frac{(B + C)^2 z'z'}{Dz''^2}\Big] dz'^2 + \Big(\frac{Q^2}{Bz^2} + \frac{R^2}{Dz''^2}\Big)\frac{dz'^2}{P^2 z'^2} + Md\varphi'^2 + \frac{2dz'd\varphi'}{Pz'}(Q - R) = K\Big[M^2 d\varphi'^2 + \ldots \frac{2Md\varphi'dz'}{Pz'}(Q - R) + \frac{dz'^2}{P^2 z'^2}(Q - R)^2\Big]$. Donc $(KM^2 - M)\Big(\frac{d\varphi'^2}{dz'^2} + \frac{2(Q - R)d\varphi'}{MPz'dz'} + \frac{(Q - R)^2}{M^2 P^2 z'^2}\Big)P^2 z'^2 = \frac{(C + D)^2 P^2 z'^4 + Q^2}{Bz^2} + \ldots \frac{(B + C)^2 P^2 z'^4 + R^2}{Dz''^2} + \frac{(Q - R)^2}{M}$.

Extrayant la racine, on trouvera

$$d\varphi = \frac{R-Q}{M} \cdot \frac{dz'}{Pz'} \pm \frac{dz'}{Pz'\sqrt{(KM^2 - M)}} \sqrt{\left[\frac{(C+D)^2 P^2 \;{}'^4 + Q^2}{Bm - z'^2 (C+D)} + \ldots \right.}$$

$$\left. \frac{(B+C)^2 P^2 z'^4 + R^2}{Dn - z'^2 (B+C)} + \frac{(Q-R)^2}{M} \right],$$

& par conféquent

$$dt = \frac{dz'}{Pz'\sqrt{(KM^2 - M)}} \sqrt{\left[\frac{(C+D)^2 P^2 z'^4 + Q^2}{Bm - z'^2 (C+D)} + \frac{(B+C)^2 P^2 z'^4 + R^2}{Dn - z'^2 (B+C)} \right.}$$

$$\left. + \frac{(Q-R)^2}{M} \right].$$

Donc nos deux équations finales font féparées, & la pofition du point *C* par rapport au centre de gravité, après un temps quelconque, ne demande, pour être connue, que des intégrations de différentielles à une feule variable. Cette pofition étant une fois déterminée, celle des corps *B* & *D* le fera bientôt par les valeurs de z & z''. Quant aux valeurs de *P*, *Q*, *R*, *M*, elles font déjà connues par les fonctions de z auxquelles on les a fuppofées égales.]

Problème IV.

Fig. 176. 469. Trois corps *B*, *C*, *D* confidérés comme des points attachés au levier angulaire *BCD* que l'on fuppofe inflexible & fans maffe, reçoivent des impulfions primitives. On demande quel fera leur mouvement en vertu de ces impulfions.

Décompofons d'abord, comme dans le problême précédent, le mouvement qu'auroit eu chaque corps dans l'inftant fuivant, s'il fût devenu libre, en deux autres, l'un qui aye lieu, l'autre qui foit détruit, & repréfentons les derniers par *Bb*, *Cc*, *Dd*. Décompofons

Décompoſons enſuite le mouvement B b en deux autres, Bb″, Bb′ ſuivant CB, DB & les deux autres pareillement. Il faudra maintenant pour l'équilibre que l'on ait $B \,.\, B$b″ $=$ $C\,.\,C$c′ ... $B\,.\,B$b′ $= D\,.\,D$d″ ... $C\,.\,C$c″ $= D\,.\,D$d′. Soient φ & μ les forces accélératrices du corps B réſultantes de l'action des corps C & D ſuivant BC & BD. Soit ψ celle du corps D ſuivant DC. Il eſt clair que le mouvement du point C ſe déterminera comme dans le problême précédent, & que celui des corps B & D ſera altéré de plus par les forces μ & $\frac{B\mu}{D}$, ſuivant BD & DB.

Or ſi on appelle c la diſtance conſtante BD, il en réſultera pour le corps B les forces accélératrices $\frac{x''-x}{c}\mu$ & $\frac{y''-y}{c}\mu$ parallélement à AP & ſuivant PB. On aura de même pour le corps D les forces accélératrices $-\frac{x''-x}{c}\,.\,\frac{B}{D}\mu$, & $-\frac{y''-y}{c}\,.\,\frac{B}{D}\mu$. Ainſi on pourra former les ſix équations ſuivantes.

$$\frac{x'-x}{a}\varphi\, dt + \frac{x''-x}{c}\mu\, dt = d\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{x''-x'}{b}\,.\,\frac{D}{C}\psi\, dt - \frac{x'-x}{a}\frac{B}{C}\varphi\, dt = d\frac{dx'}{dt}$$

$$\frac{x''-x'}{b}\psi\, dt + \frac{x''-x}{c}\,.\,\frac{B}{D}\mu\, dt = -d\frac{dx''}{dt}$$

$$\frac{y'-y}{a}\varphi\, dt + \frac{y''-y}{c}\mu\, dt = d\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{y''-y'}{b}\,.\,\frac{D}{C}\psi\, dt - \frac{y'-y}{a}\,.\,\frac{B}{C}\varphi\, dt = d\frac{dy'}{dt}$$

$$\frac{y''-y'}{b}\psi\, dt + \frac{y''-y}{c}\,.\,\frac{B}{D}\mu\, dt = -d\frac{dy''}{dt}.$$

Des trois premieres & des trois dernieres on conclura toujours

$$Bd\frac{dx}{dt}+Cd\frac{dx'}{dt}+Dd\frac{dx''}{dt}=0\ldots Bd\frac{dy}{dt}+Cd\frac{dy'}{dt}+Dd\frac{dy''}{dt}=0$$

d'où il suit que le mouvement du centre de gravité est uniforme & rectiligne. On aura aussi $Bd\frac{dx}{dt}\ d\frac{dx}{dt}+C\frac{dx'}{dt}\ d\frac{dx'}{dt}$ $+D\frac{dx''}{dt}\ d\frac{dx''}{dt}+B\frac{dy}{dt}\ d\frac{dy}{dt}+C\frac{dy'}{dt}\ d\frac{dy'}{dt}+D\frac{dy''}{dt}d\frac{dy''}{dt}=0$: (car les équations $(x'-x)^2+(y'-y)^2=a^2\ldots(x''-x')^2+(y''-y')^2=b^2\ldots(x''-x)^2+(y''-y)^2=c^2$; donnent $(x'-x)(dx'-dx)+(y'-y)(dy'-dy)=0\ldots(x''-x')(dx''-dx')+(y''-y')(dy''-dy')=0\ldots(x''-x)(dx''-dx)+(y''-y)(dy''-dy)=0$). Donc en intégrant, on aura

$$B\left(\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}\right)+C\left(\frac{dx'^2+dy'^2}{dt^2}\right)+D\left(\frac{dx''^2+dy''^2}{dt^2}\right)=\text{const.}$$

Cette intégrale & les deux que nous avons déja pour le mouvement du centre de gravité donnent la solution complette du Problême. On n'a donc pas besoin des trois autres équations que l'on pourroit avoir, outre qu'elles contiendroient les quantités inconnues φ, ψ, μ, qu'il est inutile de déterminer.

470. Non-seulement la somme des forces vives ou des produits de chaque masse par le quarré de sa *vîtesse absolue* est constante, mais encore la somme des produits de chaque masse par le quarré de sa *vîtesse de rotation* l'est aussi; ensorte que quelque soit le nombre de corps, la somme des forces

vives qu'ils ont en tournant autour de leur centre de gravité, ne varie jamais. Suppofons en effet que le centre de gravité fe meut parallélement à AP avec la vîteffe γ, il eft clair que fi on imprime à chaque partie du fyftême la vîteffe γ en fens contraire à celle du centre de gravité, les mouvements refpectifs de ces parties feront toujours les mêmes; & puifqu'alors le centre de gravité fera en repos, on aura le mouvement des parties autour du centre de gravité.

Or la vîteffe $\frac{dx}{dt}$ du corps B parallélement à AP, étant diminuée de la quantité γ, la force vive du corps B deviendra $B\left[\frac{dy^2}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}-\gamma\right)^2\right]$, & la fomme des forces vives de toutes les parties du fyftême aura pour expreffion $\int B\left[\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}-\frac{2\gamma dx}{dt}+\gamma^2\right]$. D'ailleurs la quantité.... $\int B\left(\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}\right)$ eft la fomme des forces vives abfolues, que nous avons dit être conftante. Tout fe réduit donc à prouver que $\int\frac{B\,dx}{dt}$ eft auffi une quantité conftante : mais cela eft évident, puifque cette intégrale exprime la quantité de mouvement du centre de gravité. Concluons delà que *la fomme des forces vives abfolues eft égale à la fomme des forces vives autour du centre de gravité, plus à la force vive de ce centre.*

471. Cela pofé, fi on appelle z, z', z'' les diftances du centre de gravité aux points B, C, D (remarquez que ces diftances font conftantes puifque le levier eft inflexible), & φ, φ', φ'' les angles que ces rayons vecteurs forment

avec la direction du centre de gravité, on aura pour exprimer la somme des forces vives autour de ce centre

$$\frac{Bz^2 d\varphi^2}{dt^2} + \frac{Cz'^2 d\varphi'^2}{dt^2} + \frac{Dz''^2 d\varphi''^2}{dt^2} = \text{conft.}$$

Or les angles $\varphi' - \varphi$ & $\varphi'' - \varphi'$ étant constants, puisque le centre de gravité ne change pas de position par rapport aux points B, C, D, on a $d\varphi = d\varphi' = d\varphi''$; donc $(Bz^2 + Cz'^2 + Dz''^2)\frac{d\varphi^2}{dt^2} =$ conft; & par conséquent $\frac{d\varphi}{dt}$ eft une quantité constante; d'où il suit que le mouvement angulaire du syftême autour du centre de gravité eft uniforme.

Donc en général, *quelque soit le nombre de corps situés dans un même plan & liés entr'eux par des leviers inflexibles & sans masse, si on leur donne des impulsions quelconques dans ce plan*; 1°, *leur centre commun de gravité se mouvra comme si toutes ces puissances lui étoient appliquées suivant des directions paralleles, & son mouvement sera uniforme & rectiligne*; 2°, *chaque partie du syftême tournera uniformément autour du centre de gravité.*

Fig. 177. 472. Voyons maintenant comment on peut déterminer par les impulsions initiales le mouvement de tout le syftême. Soient Bb, Cc, Dd les vîteffes imprimées aux corps B, C, D; le centre de gravité G (que l'on connoîtra par les deux proportions suivantes $BE : ED :: D \cdot B \ldots CG : GE :: B + D : C$) se mouvra comme si toutes les forces $B.Bb$, $C.Cc$, $D.Dd$ lui étoient appliquées.

Repréfentons par RR' la valeur & la direction de la réfultante; le centre de gravité G décrira GF parallele à

RR' avec la viteſſe $\frac{RR'}{B+C+D}$. De plus le ſyſtême tournera autour de G, comme ſi ce point étoit fixe : mais pour déterminer ce mouvement, ſoit $d\varphi$ l'angle que décrira le ſyſtême dans le premier inſtant dt autour de G dans le ſens BCD; on aura pour l'expreſſion des arcs $B\beta$, $C\varkappa$, $D\delta$ parcourus par les points B, C, D les quantités $GB.d\varphi$, $GC.D\varphi$, $GD.d\varphi$.

On pourra donc concevoir les mouvemens $Bb.dt$, $Cc.dt$, $Dd.dt$ que les corps auroient eus dans l'inſtant dt, s'ils euſſent été libres, comme compoſés d'autres mouvements dont les uns auront lieu ſuivant $B\beta$, $C\varkappa$, $D\delta$, & dont les autres ſeront détruits. La ſomme des moments de ceux ci autour de G ſera nulle, & par conſéquent la ſomme des moments des forces ſuivant Bb, Cc, Dd ſera égale à la ſomme des moments des forces ſuivant $B\beta$, $C\varkappa$, $D\delta$, ces moments étant pris par rapport au point G; donc le moment de la réſultante.

$RR'.RG.dt = B.GB.GBd\varphi + C.GC.GCd\varphi + D.GD.GD\,d\varphi.$

Donc $\frac{d\varphi}{dt}$ ou la viteſſe angulaire que prendra le ſyſtême autour du centre de gravité G ſera $\frac{RR'.RG}{B.GB^2+C.GC^2+D.GD^2}$, c'eſt-à-dire, que cette viteſſe ſera égale au moment de la réſultante diviſé par la ſomme des produits de chaque maſſe par le quarré de ſa diſtance au centre de gravité. On pourra donc déterminer pour chaque inſtant la poſition du ſyſtême par rapport à la droite GF.

Problême V.

Fig. 178. 473. Un fil CMM' étant chargé de deux corps M & M', on propose de déterminer les oscillations de ce pendule autour du point fixe C en les supposant infiniment petites.

Soit menée par le point C la verticale CP dont les corps ne sont jamais éloignés que de quantités infiniment petites MP, $M'P'$; & appellons $MP = x$, $M'P' = x'$, $CM = a$, $MM' = a'$.

La gravité g suivant la verticale $M'G'$ se décompose en deux forces suivant $M'P'$ & $M'H'$. Or l'angle $H'M'P'$ étant droit, la premiere a pour valeur g *sin* $H'M'G'$ ou g *sin* $M'MK$ (en menant par le point M la verticale MK) $= g\frac{(x'-x)}{a'}$. C'est donc la force accélératrice du corps M'. Ainsi on a $-d\left(\frac{dx'}{dt}\right) = \frac{x'-x}{a'}gdt$.

La force suivant $M'H'$ ou suivant le fil, laquelle résulte de la gravité g suivant $M'G'$ est égale à g, parcequ'elle n'en differe que d'un infiniment petit du second ordre. Ainsi le corps M' tire le corps M suivant MM' avec tout son poids $M'g$, qui se change pour ce corps en une force accélératrice $\frac{M'g}{M}$.

Cette force se décompose en deux, l'une suivant MP; l'autre suivant la direction du fil CMH. La premiere a pour valeur $\frac{M'g}{M}$ *sin* HMM' ou $\frac{Mg}{M}$ (*sin* MCP — *sin* $M'MK$) ou enfin $\frac{M'g}{M}\left[\left(\frac{x}{a}\right)-\left(\frac{x'-x}{a'}\right)\right]$. En second lieu, du poids même

du corps M ou de la gravité g suivant MK résulte une force tangentielle suivant MP, qui est égale à $g \, \sin MCP = g \cdot \frac{x}{a}$; donc $\frac{gx}{a} + \frac{M'g}{M} \cdot \frac{x}{a} - \frac{M'g}{M} \cdot \frac{x'-x}{a'}$ exprime la force accélératrice du corps M, & on a pour les équations du mouvement, en supposant dt constant

$$-ddx' = \frac{x'-x}{a'} g \, dt^2$$

$$-ddx = \left(\frac{x}{a}\left(1 + \frac{M'}{M}\right) - \frac{M'}{M} \cdot \frac{x'-x}{a'}\right) g \, dt^2.$$

474. Prenons un cas particulier, & supposons que les masses M, M' sont égales, ainsi que les distances a, a'; nous aurons les deux équations

$$-ddx = (3x - x') \frac{g \, dt^2}{a}$$

$$-ddx' = (x' - x) \frac{g \, dt^2}{a}.$$

Multipliant la derniere par le coëfficient constant c & ajoutant le produit à la premiere, on aura

$$ddx + \mathrm{c} \, ddx' + [(3 - \mathrm{c}) x + (\mathrm{c} - 1) x'] \frac{g \, dt^2}{a} = 0.$$

Supposons maintenant que $(3 - \mathrm{c}) x + (\mathrm{c} - 1) x'$ soit un multiple de $x + \mathrm{c} x'$, ce qui exige que $\frac{\mathrm{c} - 1}{3 - \mathrm{c}} = \mathrm{c}$, ou que $\mathrm{c}^2 - 2\mathrm{c} = 1$; & par conséquent que $\mathrm{c} = 1 \pm \sqrt{2}$. Si on désigne l'une de ces deux valeurs par c, l'autre par c', on aura $ddx + \mathrm{c} \, ddx' + (3 - \mathrm{c})(x + \mathrm{c} x') \frac{g \, dt^2}{a} = 0$; équation qui en faisant $x + \mathrm{c} x' = z$, se réduit à $ddz + (3 - \mathrm{c}) z \frac{g \, dt^2}{a} = 0.$

Multipliant par $2\,dz$ & intégrant, on a $dz^2 + \ldots\ldots$ $(3 - c)z^2 \cdot \frac{g\,dt^2}{a} = C\,dt^2$. Donc $dt\sqrt{(3-c)\frac{g}{a}} = \frac{dz}{\sqrt{(c^2 - z^2)}}$. L'intégrale eſt $z = c \operatorname{cof} t\sqrt{(3-c)\frac{g}{a}}$, en ſuppoſant que les corps n'ayent reçu aucune impulſion au commencement du mouvement. Cela poſé, en remettant pour z ſa valeur, on aura $x + c\,x' = c \operatorname{cof} t\sqrt{(3-c)\frac{g}{a}}$. On aura de même $x + c'\,x' = c \operatorname{cof} t\sqrt{(3-c')\frac{g}{a}}$. Donc ſi m & m' ſont les valeurs initiales de x & x', on trouvera

$$x + c\,x' = (m + c\,m') \operatorname{cof} t\sqrt{(3-c)\frac{g}{a}}$$
$$x + c'\,x' = (m + c'm') \operatorname{cof} t\sqrt{(3-c')\frac{g}{a}},$$

ce qui fera connoître les valeurs de x & x' en ſubſtituant à c & c' leurs valeurs $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$. Ainſi la poſition des deux corps au bout d'un temps quelconque t ſera déterminée.

Si on ſuppoſe $m + c'm' = 0$, ou $\frac{m}{m'} = \sqrt{2} - 1$, alors $x + c'\,x' = 0$; & par conſéquent x aura toujours le même rapport avec x'. Les deux corps arriveront donc en même temps à la verticale, & le temps qu'ils mettront à faire cette demi-oſcillation, ſe trouvera par la ſeconde équation qui donne $\operatorname{cof} t\sqrt{(3-c')\frac{g}{a}} = 0$, ou $t\sqrt{(3-c')\frac{g}{a}} = \frac{1}{2}\pi$. Donc $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g(2-\sqrt{2})}}$, & les oſcillations du pendule compoſé de ces deux corps ſeront iſochrones à celles d'un pendule

pendule simple qui auroit pour longueur $\frac{a}{2-\sqrt{2}}$, ou à peu-près $\frac{17}{10}a$.

Si on suppose pareillement $m + \mathfrak{c}\, m' = 0$, ou $\frac{m}{m'} = -1 - \sqrt{2}$, on aura $x + \mathfrak{c}\, x' = 0$, & les deux mobiles arriveront encore à la verticale dans le même temps. La durée de la demi-oscillation sera $\frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{a}{g(2+\sqrt{2})}}$, & la longueur du pendule simple isochrone aura pour expression $\frac{a}{2+\sqrt{2}}$, environ $\frac{3}{10}a$.

475. Lorsque le fil est chargé de trois corps M, M', M'', on peut suivre la même route pour déterminer leur mouvement. Soit $CM = a$, $MM' = a'$, $M'M'' = a''$, $MP = x$, $M'P' = x'$, $M''P'' = x''$; on décomposera l'action de la pesanteur suivant $M''G''$ en deux, l'une suivant $M''m''$, l'autre suivant $M''P''$. Celle-ci qui est la force accélératrice du corps M'' aura pour valeur g *sin* $m''M''G''$, ou $\frac{g(x''-x')}{a''}$. Donc $-ddx'' = \frac{x''-x'}{a''}g\,dt^2$. Fig. 179.

La force suivant $M''m''$ ne différant pas de celle qui agit suivant $M''G''$, ou ayant pour valeur $M''g$, le corps M' est sollicité suivant $M'M''$ par la force accélératrice $\frac{M''g}{M'}$, qui étant décomposée en deux, l'une suivant $M'm'$, l'autre suivant $M'P'$, donnera pour la derniere $\frac{M''g}{M'}$ *sin* $m'M'M''$ ou $\frac{M''g}{M'}\left(\frac{x'-x}{a'} - \frac{x''-x'}{a''}\right)$.

D'ailleurs de la gravité du corps M' résulte la force tangentielle $\frac{g(x'-x)}{a'}$. Ainsi on aura $-ddx' = \left[\frac{x'-x}{a'} + \frac{M''}{M'}\right.$

Ddd

$\left(\frac{x'-x}{a'} - \frac{x''-x'}{a''}\right)\Big] g\,dt^2$; & la force qui en résultera suivant MM', ou qui agira sur le corps M, aura pour expression. $(M'+M'')\,g$.

Cette force accélératrice $\frac{M'+M''}{M}g$ suivant MM', produit suivant PM la force tangentielle $\frac{M'+M''}{M}g\left(\frac{x'-x}{a'} - \frac{x}{a}\right)$. La gravité du corps M produit aussi la force tangentielle $\frac{gx}{a}$; on aura donc $-ddx = \left[\frac{x}{a} + \frac{M'+M''}{M}\left(\frac{x}{a} - \frac{x'-x}{a'}\right)\right] g\,dt^2$.

476. En général, *quel que soit le nombre des corps, pourvû qu'ils soient tous infiniment peu éloignés de la verticale, chacun peut être regardé comme sollicité par sa gravité propre suivant la verticale, & par le poids de tous les corps inférieurs suivant la direction du plus proche.*

Ce principe suffira toujours pour faire connoître la force accélératrice de chaque corps, & par conséquent pour former les équations du mouvement.

ARTICLE III.

Du Mouvement de rotation d'un corps quelconque autour d'un axe donné.

PRINCIPE FONDAMENTAL.

477. *Un corps quelconque étant assujetti à tourner autour d'un axe donné, si une ou plusieurs puissances dirigées dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation, lui impriment du mouvement autour de cet axe, quelles que soient les forces avec lesquelles les différentes particules du systême se mouvront, la*

somme des moments de ces forces par rapport à l'axe sera toujours égale à la somme des moments des puissances par rapport à ce même axe, ou ce qui est la même chose, au moment de la résultante des puissances.

Quel que soit en effet le mouvement que chaque particule prendra, si on lui en imprimoit un égal & en sens contraire, le systême resteroit en équilibre. Il faut donc que les forces qui animent chaque particule, dirigées en sens contraire, fassent équilibre aux puissances motrices. Donc par la condition de l'équilibre dans le treuil, la somme des moments des unes est égale à la somme des moments des autres, ces moments étant pris par rapport à l'axe de rotation.

Mais sans avoir recours à cette propriété du treuil, on peut démontrer la même chose par le principe de M. d'Alembert. Car supposons des puissances quelconques appliquées, si l'on veut, à toutes les particules du systême (ces puissances étant toujours dirigées dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation), le mouvement imprimé à chaque particule sera composé du mouvement qu'elle prendra, & d'un autre que nous appellerons ϛ. Donc le moment de la force imprimée, par rapport à l'axe, sera égal au moment de la force qu'aura prise la particule, plus au moment de ϛ; & la somme des moments de toutes les forces motrices sera égale à la somme des moments des forces dont chaque particule sera réellement animée, plus à la somme des moments de toutes les forces ϛ. Or ces forces ϛ doivent se

faire équilibre; la somme de leurs moments est donc nulle.

478. Nous avons supposé que les puissances motrices étoient dirigées dans des plans perpendiculaires à l'axe ; mais si elles étoient obliques, il faudroit les décomposer chacune en deux autres, l'une parallele à l'axe & qui ne pourroit produire aucun mouvement autour de cet axe; l'autre située dans un plan perpendiculaire à l'axe, & qui seule feroit naître le mouvement de rotation.

479. Soit donc R la résultante des puissances motrices, D sa distance à l'axe, & par conséquent $R \,.\, D$ son moment. Soit φ la vîtesse angulaire que prendra le corps ou le systême; φ est l'arc que décrira un point situé à la distance 1 de l'axe pendant une unité de temps. Si on désigne par $d\,M$ une particule quelconque du corps, située à la distance r de l'axe, sa vîtesse sera $r\varphi$, sa quantité de mouvement $r\varphi d\,M$, son moment $r^2\varphi d\,M$, & la somme des moments des forces semblables, $\int r^2\,\varphi\, d\,M$, ou simplement $\varphi\int r^2 dM$. Donc $\varphi\int r^2 d\,M = R\,.\,D$, ou $\varphi = \frac{R\,.\,D}{\int r^2\,d\,M}$.

L'intégrale $\int r^2\,d\,M$ exprime la somme des produits de chaque particule du systême, par le quarré de sa distance à l'axe. Cette quantité qui est toujours donnée par la nature du corps, s'appelle *le Moment d'inertie.*

480. De la formule $\varphi = \frac{R\,.\,D}{\int r^2\,d\,M}$ on doit conclure généralement que *quelles que soient les forces motrices appliquées à un corps de figure quelconque, dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation, la vîtesse angulaire qui en résultera autour de cet axe, sera égale à la somme des moments des forces mo-*

trices, ou au moment de leur résultante, divisé par le moment d'inertie du corps.

481. Cette vîtesse angulaire une fois imprimée, le corps tournera perpétuellement autour de son axe avec la même vîtesse, si aucune puissance n'altere son mouvement. Mais si le corps est soumis à l'action d'une force accélératrice quelconque, alors appellant R la résultante des actions particulieres de cette force sur toutes les parties du systême, & D sa distance à l'axe, on aura $R\,dt\,.\,D$ pour l'expression du moment que cette force peut produire dans l'instant dt. Quant à l'augmentation ou à la diminution que ce moment produira dans la vîtesse angulaire du corps, elle sera $d\varphi = \frac{R\,dt\,.\,D}{\int r^2\,dM}$.

Tels sont, en abrégé, les principes avec lesquels on peut déterminer dans tous les cas le mouvement d'un corps quelconque autour d'un axe donné. Mais comme il faut savoir auparavant déterminer le moment d'inertie, nous allons d'abord en indiquer la méthode.

Du Moment d'inertie, & des trois Axes principaux dans un corps quelconque.

482. Le moment d'inertie étant la somme des produits de chaque particule d'un corps, par le quarré de sa distance à un axe donné, on seroit porté à croire que pour chaque axe en particulier il faut un nouveau calcul : mais nous allons faire voir que tout se réduit à chercher les moments d'inertie par rapport aux axes qui passent

par le centre de gravité. Nous prouverons ensuite que la recherche de ceux-ci peut se restreindre à trois seulement.

Fig. 130. 483. Soit AB l'axe de rotation, G le centre de gravité du corps, M le lieu de l'élément dM. Par le point M soit mené le plan MPQ perpendiculaire à l'axe AB, & dont PQ soit l'intersection avec le plan AGB de la figure. Par le point G soit menée la ligne GH parallele à AB, & la ligne Gg perpendiculaire au même axe. Enfin soit MQ perpendiculaire à PQ & au plan de la figure.

Cela posé, on aura $MP^2 = MH^2 + PH^2 + 2PH \cdot HQ = MH^2 + Gg^2 + 2Gg \cdot HQ$; donc $\int dM \cdot MP^2 = \int dM \cdot MH^2 \cdot + \int dM \cdot Gg^2 + 2Gg \cdot \int dM \cdot HQ$. Or par la nature du centre de gravité on a $\int dM \cdot HQ = 0$; donc

$$\int dM \cdot MP^2 = \int dM \cdot MH^2 + M \cdot Gg^2.$$

C'est à-dire que *le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque, est égal au moment d'inertie par rapport à l'axe parallele qui passe par le centre de gravité, plus au produit de la masse du corps par le quarré de la distance de ces deux axes.*

484. Ainsi entre tous les axes paralleles, celui qui passe par le centre de gravité est celui par rapport auquel le moment d'inertie est le plus petit. Il est donc facile de trouver le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque, pourvû que l'on connoisse les moments d'inertie par rapport aux axes qui passent par le centre de gravité.

Mais quoiqu'on puisse mener par ce centre une infinité d'axes différents, & que les moments d'inertie rapportés à

ces axes puissent varier à l'infini, on voit bien qu'aucun de ces moments ne peut être nul ni infini. Il faut donc qu'il y en ait un plus grand & un plus petit que tous les autres; & c'est à la recherche de leur *Maximum* & de leur *Minimum* qu'est destiné le calcul suivant.

485. Soit A le centre de gravité du corps, soient AX, XY, YZ les trois coordonnées du point Z où se trouve l'élément dM. Appellons x, y, z ces trois coordonnées. Soit AF l'axe par rapport auquel le moment d'inertie doit être un *Maximum* ou un *Minimum*. Suivant AF soit mené le plan AEF perpendiculaire à celui de la figure, AFX, & du point Y soit menée sur l'intersection commune AE de ces deux plans la perpendiculaire YX. Fig. 181.

Si on désigne l'angle BAE par α & l'angle EAF par β, on aura $AX' = AY \cos(YAX - \alpha) = x \cos \alpha + y \sin \alpha$, & $X'Y = y \cos \alpha - x \sin \alpha$. Complétant le rectangle $X'YZY''$, on pourra regarder AX', $X'Y''$, $Y''Z$ comme les trois coordonnées rectangles du point Z; & si du point Y'' où ZY'' traverse le plan AFE auquel elle est perpendiculaire, on mene la ligne $Y''X''$ perpendiculaire sur AF, on aura pour les valeurs des trois nouvelles coordonnées rectangles AX'', $X''Y''$, $Y''Z$, que nous appellerons x'', y'', z'',

$$x'' = AX' \cos \beta + X'Y'' \sin \beta = x \cos \alpha \cos \beta + y \sin \alpha \cos \beta + z \sin \beta$$
$$y'' = X'Y'' \cos \beta - AX' \sin \beta = z \cos \beta - y \sin \alpha \sin \beta - x \cos \alpha \sin \beta$$
$$z'' = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Cela posé, le quarré de la distance du point Z à l'axe AF

sera $y''^2 + z''^2 = x^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\beta) + y^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\sin^2\beta) + z^2\cos^2\beta - 2xy\cos\alpha\sin\alpha + 2xy\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta - 2yz\sin\alpha\sin\beta\cos\beta - 2xz\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$; faisant donc, pour abréger, les intégrales prises dans toute l'étendue du corps, lesquelles sont censées ici connues,

$$\int x^2\,dM = A \ldots \int y^2\,dM = B \ldots \int z^2\,dM = C$$

$$\int xy\,dM = D \ldots \int xz\,dM = E \ldots \int yz\,dM = F$$

Le moment d'inertie par rapport à l'axe AF sera

$$A(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\beta) + B(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\sin^2\beta) + C\cos^2\beta$$
$$- 2D\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta - 2E\sin\beta\cos\beta\cos\alpha - 2F\sin\beta\cos\beta\sin\alpha.$$

Pareillement les formules intégrales $\int x''y''\,dM$, $\int x''z''\,dM$ qu'il est important de connoître, auront pour valeurs

$$\int x''y''\,dM = -A\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta + B\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta + D\cos 2\alpha\cos\beta$$
$$- E\sin\alpha\sin\beta + F\cos\alpha\sin\beta$$

$$\int x''z''\,dM = -A\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta - B\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta + C\sin\beta\cos\beta$$
$$- 2D\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta + E\cos\alpha\cos 2\beta + F\sin\alpha\cos 2\beta.$$

Maintenant, puisque le moment d'inertie est un *Maximum* ou un *Minimum*, il faudra différentier sa valeur, en faisant varier d'abord α, ensuite β; puis égaler chaque différentielle à zéro. On aura donc 1°,

$$2A\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta - 2B\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta - 2D\cos 2\alpha\cos^2\beta$$
$$+ 2E\sin\beta\cos\beta\sin\alpha - 2F\sin\beta\cos\beta\cos\alpha = 0,$$

& en divisant par $-2\cos\beta$, il viendra

$$-A\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta + B\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta + D\cos 2\alpha\cos\beta$$
$$- E\sin\beta\sin\alpha + F\sin\beta\cos\alpha = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{I})$$

d'où il suit que $\int x''y''\,dM = 0$. 2°, en faisant varier β on trouvera

$$2A\sin\beta\cos\beta\cos^2\alpha + 2B\sin\beta\cos\beta\sin^2\alpha - 2C\sin\beta\cos\beta$$
$$+ 4D\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - 2E\cos\alpha\cos 2\beta - 2F\sin\alpha\cos 2\beta = 0; \ldots (\text{II})$$

d'où

d'où il ſuit également que $\int x'' z'' \, dM = 0$.

De l'équation (I) on déduit $tang\,\varepsilon = \frac{(A-B)\,\sin\alpha\cos\alpha - D\cos 2\alpha}{F\cos\alpha - E\sin\alpha}$; & de l'équation (II), on déduit $tang\,2\varepsilon = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{2E\cos\alpha + 2F\sin\alpha}{A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha - C + 2D\sin\alpha\cos\alpha}$. Or $tang\,2\varepsilon = \frac{2\,tang\,\varepsilon}{1 - tang^2\,\varepsilon}$; donc

$$\frac{2E\cos\alpha + 2F\sin\alpha}{A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha - C + 2D\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{(2F\cos\alpha - 2E\sin\alpha)[(A-B)\sin\alpha\cos\alpha - D\cos 2\alpha]}{(F\cos\alpha - E\sin\alpha)^2 - [(A-B)\sin\alpha\cos\alpha - D\cos 2\alpha]^2}$$

ou $\frac{(E\cos\alpha + F\sin\alpha)(F\cos\alpha - E\sin\alpha)^2}{(A-B\sin\alpha\cos\alpha - D(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} = \begin{matrix} F(A\cos\alpha - C\cos\alpha + D\sin\alpha) \\ +E(-B\sin\alpha + C\sin\alpha - D\cos\alpha) \end{matrix} + \ldots$

En continuant le calcul on parviendra enfin à l'équation ſuivante.

$$\begin{aligned} &[E^2F - D^2F + (B-C)DE]\,tang^3\,\alpha \\ &+ [E^3 - 2EF^2 + D^2E + (B - 2A + C)DF + (A-B)(B-C)E]\,tang^2\,\alpha \\ &+ [F^3 - 2FE^2 + D^2E + (A - 2B + C)DE - (A-B)(A-C)F]\,tang\,\alpha \\ &+ EF^2 - D^2E + (A-C)DF = 0. \end{aligned}$$

486. Cette équation étant du troiſieme degré, & devant avoir deux racines réelles, puiſqu'il y a néceſſairement deux axes dont l'un donne le *Maximum* & l'autre le *Minimum*, ſes trois racines ſont toutes réelles. Suppoſons que l'on connoiſſe déja un axe par rapport auquel le moment d'inertie eſt le plus grand ou le plus petit poſſible, & voyons immédiatement comment on peut alors déterminer les deux autres. Je dis *immédiatement*, car cela ſeroit difficile à déduire de l'équation précédente.

Soit A le centre de gravité du corps, AB l'axe connu par rapport auquel le moment d'inertie eſt un *Maximum* ou un *Minimum*. On ſait que dans ce cas $\int xy\,dM = 0$, & que $\int xz\,dM = 0$. Ainſi faiſant $D = 0$, & $E = 0$ dans les formules trouvées ci-deſſus

$$tang\ \epsilon = \frac{(A-B)\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha - D\ cos^2\ \alpha}{F\ cos\ \alpha - E\ sin\ \alpha} \ldots tang\ 2\ \epsilon = \frac{2\ E\ cos\ \alpha + 2\ F\ sin\ \alpha}{A\ cos^2\ \alpha + B\ sin^2\ \alpha - C + D\ sin\ 2\ \alpha}$$

on aura

$$tang\ \epsilon = \frac{(A-B)\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha}{F\ cos\ \alpha} \ldots\ldots\ldots\ tang\ 2\ \epsilon = \frac{2\ F\ sin\ \alpha}{A\ cos^2\ \alpha + B\ sin^2\ \alpha - C}.$$

La premiere donne $tang\ \epsilon = \frac{A-B}{F}\ sin\ \alpha$, ou $cos\ \alpha = 0$. Or la formule $tang\ \epsilon = \frac{A-B}{F}\ sin\ \alpha$ donneroit $tang\ 2\ \epsilon = \ldots\ldots$ $\frac{2\ F\ (A-B)\ sin\ \alpha}{F^2 - (A-B)^2\ sin^2\ \alpha}$, valeur qui étant égalée à celle que nous avons déja pour $tang\ 2\ \epsilon$ conduiroit à l'équation $\frac{F^2}{A-B} = A - C$, qui ne fait rien connoître & qui est fausse. Il n'y a donc que la valeur $cos\ \alpha = 0$ qui puisse satisfaire; donc $tang\ 2\ \epsilon = \frac{2\ F}{B-C}$.

487. Puisque $cos\ \alpha = 0$, les deux autres axes se trouvent dans le plan perpendiculaire à AB. D'ailleurs l'équation $tang\ 2\ \epsilon = \frac{2\ F}{B-C}$ donnant deux valeurs de ϵ, l'une ϵ, l'autre $90 + \epsilon$, il s'ensuit que les deux autres axes sont perpendiculaires entr'eux; & par conséquent *dans un corps quelconque il y a toujours trois axes perpendiculaires entr'eux, par rapport auxquels les moments d'inertie sont des* Maxima *ou des* Minima.

Ces axes dont l'usage est très-grand dans cette partie de la Dynamique, s'appellent *les trois Axes principaux* du corps. Nous les avons considérés jusqu'ici entre tous ceux qui passent par le centre de gravité; mais comme rien dans notre calcul ne suppose que le point A soit le centre de gravité du corps, on doit conclure généralement que *par rapport à un point quelconque du corps, il y a toujours trois axes*

principaux, dont la propriété est de rendre les moments d'inertie les plus grands ou les plus petits possibles ; & ces trois axes sont perpendiculaires entr'eux.

488. Mais comme il est plus ordinaire & plus commode de considérer les axes principaux par rapport au centre de gravité, soient AB, AC, AD ces trois axes. Puisqu'ils sont perpendiculaires entr'eux, on pourra les regarder comme des directrices paralleles aux coordonnées x, y, z ; & puisque d'un côté la propriété du centre de gravité donne $\int x\,dM = 0 \ldots \int y\,dM = 0 \ldots \int z\,dM = 0$, pendant que de l'autre côté on a, par la nature des axes principaux, $\int xy\,dM = 0 \ldots \int xz\,dM = 0 \ldots \int yz\,dM = 0$, il est évident que le calcul en sera beaucoup plus simple.

489. Il est vrai que si on ne connoît aucun de ces axes, il faut, pour les déterimner, résoudre une équation fort compliquée du troisieme degré : mais aussi pour peu que l'on en connoisse un seul, on déterminera facilement les deux autres, en prenant l'axe connu pour une des directrices ou pour la ligne des x, les deux autres directrices paralleles à y & z étant prises à volonté. Car en supposant les intégrales $\int y^2\,dM = B \ldots \int z^2\,dM = C \ldots \int yz\,dM = F$, on aura l'angle ϵ que fait l'un des deux autres axes principaux avec la directrice parallele à y, par la formule $tang\ 2\epsilon = \frac{2F}{B-C}$, & le moment d'inertie par rapport à un de ces axes sera $= A + B\,sin^2\epsilon + C\,cos^2\epsilon - F\,sin\ 2\epsilon$.

490. Des trois moments que donnent les trois axes princi-

paux, l'un doit être un *Maximum*, l'autre un *Minimum*. Le troisieme, s'il n'est point égal à l'un des deux premiers, ne peut être ni un *Maximum* ni un *Minimum* absolu. A cela près il aura les mêmes propriétés.

Mais remarquons que si deux des axes principaux produisent des moments égaux, les moments par rapport à tous les axes possibles situés dans leur plan seront égaux entr'eux, puisqu'il ne peut y en avoir de plus grand ni de plus petit que ceux des axes principaux. Il en est de même, lorsque les trois axes principaux donnent les trois moments d'inertie égaux entr'eux.

Fig. 181. 491. Soient AB, AC, AD les trois axes principaux du corps; soit AF un axe quelconque passant par le point A, dont la position soit donnée par les angles $BAE = \alpha$, $EAF = \beta$. Puisqu'alors $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, le moment d'inertie par rapport à l'axe IF est $= A\,(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta) + B\,(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) + C \cos^2 \beta$, comme on le déduit de la formule générale (485).

Nommons Ma^2, Mb^2, Mc^2 les moments d'inertie par rapport aux axes AB, AC, AD; nous aurons $Ma^2 = B + C \ldots Mb^2 = A + C \ldots Mc^2 = A + B$; donc $A = \frac{1}{2} M\,(b^2 + c^2 - a^2) \ldots B = \frac{1}{2} M\,(a^2 + c^2 - b^2) \ldots C = \frac{1}{2} M\,(a^2 + b^2 - c^2)$; & par conséquent le moment d'inertie par rapport à l'axe quelconque $AF = M\,(a^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + c^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + c^2 \sin^2 \beta)$. Or il n'est pas difficile de voir que $\cos FAB = \cos \alpha \cos \beta \ldots \cos FAC = \sin \alpha \cos \beta \ldots \cos FAD = \sin \beta$; donc le moment d'inertie par rapport à l'axe AF sera exprimé très-simplement par la formule.

$M(a^2 \cos^2 FAB + b^2 \cos^2 FAC + c^2 \cos^2 FAD)$

Imaginons maintenant une ſphère décrite autour du centre de gravité G, & ſuppoſons en A, B, C les poles des axes principaux, enſorte que AB, BC, AC ſoient des quarts de cercle. Si on déſigne par Ma^2, Mb^2, Mc^2 les moments d'inertie par rapport aux axes GA, GB, GC, on aura pour le moment d'inertie rapporté à un axe quelconque GF, l'expreſſion $M(a^2 \cos^2 AF + b^2 \cos^2 BF + c^2 \cos^2 CF)$. Appellant donc α, β, γ les arcs AF, BF, CF, la valeur de ce moment deviendra $M(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma)$. Mais par la propriété de la ſphère on a $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$; ainſi quand on connoît les moments d'inertie par rapport aux axes principaux, il eſt aiſé de déterminer ces moments par rapport à tout autre axe. Quelques exemples vont achever d'éclaircir la théorie. Fig. 182.

Nous ne conſidérerons ici les moments d'inertie que par rapport aux axes qui paſſent par le centre de gravité. De plus nous ſuppoſerons que les corps ſont homogenes, c'eſt-à-dire, que toutes leurs parties ſont d'une égale denſité, afin de pouvoir repréſenter dans le calcul la maſſe d'une ligne, d'une ſurface, ou d'un ſolide, par cette ligne, cette ſurface, ou ce ſolide même.

Exemple I.

492. Soit AGA un fil ou un levier extrêmement mince qui puiſſe être conſidéré comme une ligne droite. Son centre de gravité étant à ſon milieu G, il eſt clair que la ligne AGA Fig. 183.

sera elle-même un des axes principaux, puisque le moment d'inertie par rapport à AGA est nul, & par conséquent un *Minimum*. Les deux autres axes principaux seront des perpendiculaires quelconques GB.

Cela posé, si on fait, $GM = x$, $Mm = dx$, les élémens Mm, Mm pris de part & d'autre du point G donneront, par rapport à l'axe GB, le moment d'inertie $2x^2 dx$ dont l'intégrale est $\frac{2}{3}x^3$; & si la ligne entiere est désignée par $2a$, le moment d'inertie sera $\frac{2}{3}a^3$, ou $\frac{1}{3}Ma^2$, par rapport à tout axe GB perpendiculaire à AG.

Donc si GF est un axe oblique quelconque dont l'inclinaison sur GA soit $= q$, on aura pour le moment d'inertie rapporté à cet axe la quantité $\frac{1}{3}Ma^2 \sin^2 q$. Outre que cela est évident, on peut le déduire de ce qui précéde, en observant que dans la formule générale $M(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \mathrm{C} + c^2 \cos^2 \gamma)$ on a pour le cas présent, $a = 0$, $b^2 = c^2 = \frac{1}{3}a^2$, $\cos \mathrm{C} = \sin q$, $\gamma = 90^\circ$; car le troisieme axe GC est supposé perpendiculaire au plan des deux axes AG, GB.

Exemple II.

Fig. 184. 493. Soit BMA un anneau circulaire infiniment mince; dont la masse soit M; (on pourra le considérer comme une circonférence de cercle). Un des axes principaux sera perpendiculaire en C au plan de ce cercle, les deux autres seront des diametres quelconques BCA.

Par rapport au premier axe, le moment d'inertie sera Ma^2, a étant le rayon du cercle, & par rapport au dia-

metre BCA, ce moment aura pour valeur $\int Mm \,.\, MP^2 = \int a \,.\, MP \,.\, Pp = a \times$ l'aire du cercle $= \pi a^3$. Quant à la circonférence par laquelle nous avons représenté la masse M, elle sera $2\pi a$; ainsi le moment d'inertie par rapport à tout diametre du cercle sera exprimé par $\frac{M}{2\pi a} \,.\, \pi a^3$ qui se réduit à $\frac{1}{2} Ma^2$; ensorte qu'il n'est que la moitié du moment d'inertie pris par rapport à l'axe principal perpendiculaire au plan du cercle.

494. En général, si un corps M peut être considéré comme une ligne ou comme une surface située dans un même plan, un des axes principaux sera perpendiculaire à ce plan, & les deux autres seront situés dans ce plan. En effet pour qu'un axe soit du nombre des principaux, il faut qu'en prenant sur cet axe, à compter du centre de gravité, l'abscisse x, & prenant les ordonnées perpendiculaires y, z pour un point quelconque, on ait $\int xydM = 0 \ldots\ldots \int xzdM = 0$. (485). Or dans ce cas $x = 0$ pour tous les points du corps; donc ces intégrales se réduisent à zéro; donc un des axes principaux est perpendiculaire au plan de la figure, & les deux autres sont situés nécessairement dans ce plan, puisqu'ils doivent être perpendiculaires au premier.

Exemple III.

495. Si on considere maintenant la surface d'un cercle dont le rayon soit a, la masse M sera πa^2; tous les diametres pourront servir d'axes principaux, & on aura $\int y^2 dM = \int z^2 dM$. Donc le moment d'inertie par rapport à l'axe (P) perpendiculaire au plan du cercle est double du moment d'inertie par rapport à un diametre quelconque. Or le mo- Fig. 185.

ment de l'anneau circulaire décrit par l'élément $M\,m$ est par rapport à l'axe P, $2\pi \cdot GM \cdot Mm \cdot GM^2 = 2\pi z^3 dz$, en supposant $GM = z$; & l'intégrale de cette derniere quantité est $\frac{\pi}{2} z^4$, qui se change en $\frac{\pi}{2} a^4$ pour tout le cercle. Donc le moment d'inertie par rapport à l'axe (P) est $\frac{1}{2} M a^2$, & par rapport à un diametre quelconque, il est $\frac{1}{4} M a^2$.

EXEMPLE IV.

FIG. 136. 496. Dans un solide de révolution quelconque, l'axe de figure est un des axes principaux, & les deux autres axes principaux sont des diametres quelconques de la section circulaire faite perpendiculairement à l'axe par le centre de gravité. Pour le prouver, il faut faire voir qu'en prenant sur l'axe GP l'abscisse $GP = x$, & dans le plan perpendiculaire les deux coordonnées $PQ = y$, $QM = z$, on aura $\int xy\,dM = 0$ $\int xz\,dM = 0$.

Or dans une même section, x étant constante, on doit avoir $\int xy\,dM = x \int y\,dM$; & puisque $\int y\,dM$ exprime la masse de cette Section multipliée par la distance de son centre de gravité à la ligne perpendiculaire en P sur le plan GPQ, cette distance étant zéro à cause que le centre de gravité est en P, il faut que pour chaque coupe perpendiculaire à GP, on ait $\int xy\,dM = 0$; & par conséquent dans toute l'étendue du solide, on aura $\int xy\,dM = 0$.. $\int xz\,dM = 0$. Donc GP axe du solide est un des axes principaux.

Les deux autres seront situés nécessairement dans la Section

tion perpendiculaire à l'axe au point G; ils feront donc des diametres quelconques de cette fection, puifqu'elle eft circulaire. Or les axes principaux étant ainfi déterminés, il ne s'agit plus que de connoître les moments d'inertie par rapport à ces axes.

Par la propriété du cercle on a d'abord $\int y^2 dM = \int z^2 dM$; ainfi le moment par rapport à l'axe GP eft $2\int y^2 dM$, & par rapport à un diametre quelconque de la fection circulaire faite par le point G, ce moment eft $\int x^2 dM + \int y^2 dM$. Comme x eft conftante, lorfqu'il s'agit d'une même coupe QZN d'une épaiffeur infiniment petite, & comme d'ailleurs la maffe de cette coupe eft $\pi . Z . P^2 dx$, on aura $\int x^2 dM = \int \pi x^2 dx . ZP^2$.

Quoique cette formule paroiffe négative, quand x l'eft, il ne faut pas fouftraire le moment d'inertie qui réfulte d'un côté du centre de gravité, de celui qui réfulte de l'autre côté; mais il faut toujours les ajouter, parce que l'élément dM de la maffe eft toujours ajouté au refte du corps, & qu'il doit par conféquent être toujours pofitif, ainfi que $\int x^2 dM$. Au refte on éviteroit ce petit inconvénient, en comptant les abfciffes de l'extrémité de l'axe.

Si on appelle Y la furface de la coupe du folide, faite perpendiculairement au plan GPQ, à la diftance y de l'axe, on aura la valeur de Y en y par la nature du folide, & l'expreffion $\int y^2 dM$ fera égale à $\int y^2 . Y dy$. Enfin la maffe du folide étant $M = \int \pi y^2 dx$, il faudra multiplier les moments trouvés par $\frac{M}{\pi \int y^2 dx}$.

Exemple V.

Fig. 187. 497. Lorsque le solide de révolution est un cylindre, ZP est constante & $= b$, & la longueur du cylindre $= 2a$. On a donc alors $\int x^2 dM = \pi b^2 \cdot \frac{x^3}{3} = \pi b^2 \cdot \frac{a^3}{3}$ pour une moitié du cylindre, & $\int x^2 dM = \pi b^2 \cdot \frac{2}{3} a^3$ pour le cylindre entier.

Quant à la Section Y, elle est dans ce cas un rectangle dont la longueur est $2a$, & dont la largeur est $2\sqrt{(b^2 - y^2)}$. Donc $\int y^2 dM = \int 4aydy\sqrt{(b^2 - y^2)} = \ldots\ldots$ $4a[\frac{1}{4}b^2\int dy\sqrt{(b^2 - y^2)} - \frac{1}{4}y(b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}]$. Cette intégrale devant être prise entre les deux limites $y = 0$, $y = b$, on aura $\int dy\sqrt{(b^2 - y^2)}$ ou $\frac{1}{4}\pi b^2$, pour le quart de cercle dont le rayon est b; ainsi l'intégrale sera $\frac{\pi}{4} ab^4$. Son double $\frac{\pi}{2} ab^4$ sera égal à $\int y^2 dM$ pris dans toute l'étendue du solide. D'ailleurs la masse $M = 2a \cdot \pi b^2$; donc le moment d'inertie par rapport à l'axe même du cylindre sera $\frac{M}{2a \cdot \pi b^2} \cdot \pi ab^4 = \frac{1}{2} Mb^2$, & par rapport à l'un quelconque des autres axes principaux, ce moment aura pour valeur $\frac{M}{2a \cdot \pi b^2}(\pi b^2 \cdot \frac{2}{3} a^3 + \frac{1}{2}\pi ab^4) = M(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{4}b^2)$. Donc les moments par rapport à tous les axes qui passent par le centre de gravité seront tous égaux, si $\frac{1}{3}aa + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{2}b^2$, ou si $4a^2 = 3b^2$.

Exemple. VI.

498. Si le solide est une sphere, il est évident que les moments d'inertie rapportés à tous les axes qui passent par le centre de gravité doivent être égaux; & puisque le rayon étant appellé a, on trouve que $\int x^2 dM = \int \pi x^2 dx (a^2 - x^2) =$

$\pi\left(\frac{a^2 x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)$, on aura pour la valeur de cette intégrale, en faisant $x = a$, l'expression $\frac{2}{15}\pi a^5$, dont le double $\frac{4}{15}\pi a^5 = \int x^2\, dM$ pris dans toute l'étendue du solide. Donc le moment d'inertie par rapport à un diametre quelconque est $2\int x^2\, dM = \frac{8}{15}\pi a^5 \cdot \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{2}{5} M a^2$.

EXEMPLE VII.

499. Quand il s'agit d'une lentille $ACBD$ composée de deux segments égaux de sphere, ou produite par la révolution de deux arcs égaux & semblables AC, AD autour de leur flêche CD, alors le centre de gravité est en G milieu de CD; & si on fait $DG = CG = a$, $AG = BG = b$, le rayon des deux arcs $DC = c = \frac{b^2 + a^2}{2a}$, on aura $PZ^2 = 2cp - p^2$, & $x = a - p$. Fig. 188.

Donc $\int x^2\, dM = \pi\int (a-p)^2 dp\, (2cp - p^2) = \pi\left[2c\left(\frac{a^2p^2}{2} - \frac{2}{3}ap^3 + \frac{1}{4}p^4\right) - \frac{a^2p^3}{3} + \frac{1}{2}ap^4 - \frac{1}{5}p^5\right]$; supposant $p = a$, & doublant l'intégrale on aura $\int x^2\, dM = \pi\left(\frac{1}{3}a^4 c - \frac{1}{15}a^5\right) = \frac{1}{6}\pi a^3(a^2 + b^2) - \frac{8}{15}\pi a^5 = \pi\left(\frac{1}{6}a^3 b^2 + \frac{1}{10}a^5\right) = \frac{\pi a^3}{30}(3a^2 + 5b^2)$.

On aura ensuite $\int y^2\, dM = \frac{1}{4}\pi\int PZ^4\, dp = \frac{1}{4}\pi\int (2cp - p^2)^2\, dp = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{4c^2p^3}{3} - cp^4 + \frac{p^5}{5}\right)$. Substituant p au lieu de a, & doublant on trouvera que $\int y^2\, dM = \frac{1}{2}\pi a^3\left(\frac{4}{3}c^2 - ac + \frac{a^2}{5}\right) = \frac{1}{30}\pi a^3(20c^2 - 15ac + 3a^2) = \frac{1}{60}a\pi(a^4 + 5a^2b^2 + 10b^4)$. Or la masse $M = \int \pi\, dp\, (2cp - p^2) = \pi\left(cp^2 - \frac{1}{3}p^3\right)$; faisant donc $p = a$ & doublant, on aura

$M = \frac{1}{3} a \pi (a^2 + 3 b^2)$; & par conſéquent

$$\int x^2 dM = \frac{1}{10} Ma^2 \cdot \frac{5b^2 + 3a^2}{3b^2 + a^2} \ldots \int y^2 dM = \frac{1}{20} M \cdot \frac{a^4 + 5a^2 b^2 + 10 b^4}{a^2 + 3 b^2}.$$

Ce qui donne enfin pour le moment d'inertie par rapport à l'axe principal CD, la quantité $\frac{1}{10} M \cdot \frac{a^4 + 5a^2b^2 + 10b^4}{a^2 + 3b^2}$, & pour le moment d'inertie rapporté à l'un quelconque des deux autres axes AB, la quantité $\int x^2 dM + \int y^2 dM = \frac{1}{20} M \cdot \frac{7a^4 + 15a^2b^2 + 10b^4}{a^2 + 3b^2}$.

EXEMPLE VIII.

FIG. 189. 500. S'il s'agit d'un parallélepipede, la recherche de ſes axes principaux n'a pas de difficulté. Ce ſont trois lignes IGL, XGY, YGT menées par le centre de gravité parallélement aux trois côtés. Soient donc ces côtés $AB = 2a$, $AC = 2b$, $CH = 2c$, & x, y, z les trois co-ordonnées paralleles menées par le centre de gravité.

Cela poſé, toutes les coupes faites perpendiculairement à GI étant $= 4bc$, on aura $\int x^2 dM = 4bc \int x^2 dx = \frac{4bcx^3}{3}$; faiſant $x = a$, & doublant, ou ſi l'on aime mieux, prenant l'intégrale entre les limites $x = +a$, $x = -a$, on trouvera que $\int x^2 dM = \frac{4bc \cdot 2a^3}{3} = \frac{1}{3} Ma^2$, (puiſque $M = 8abc$). On trouvera de même que $\int y^2 dM = \frac{1}{3} Mb^2$, & que $\int z^2 dM = \frac{1}{3} Mc^2$; ainſi le moment d'inertie par rapport aux axes reſpectivement paralleles à AB, à AC, & à CH, ſera

$$\frac{1}{3} M (b^2 + c^2) = \frac{1}{12} M (AC^2 + CH^2)$$
$$\frac{1}{3} M (a^2 + c^2) = \frac{1}{12} M (AB^2 + BE^2)$$
$$\frac{1}{3} M (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} M (AB^2 + AC^2).$$

Ces trois valeurs ſont toujours égales ſoit dans le cube, ſoit dans les autres corps réguliers.

REMARQUE.

La méthode qu'il faut ſuivre pour déterminer dans tous les cas les axes principaux & les moments d'inertie, étant ſuffiſamment indiquée, nous terminerons cet Article par la diſtribution des corps en pluſieurs claſſes.

501. On peut diſtribuer les corps en diverſes claſſes ſélon la nature de leurs axes principaux. Si ces axes ſont ſemblables, ou ſi les moments d'inertie par rapport à ces axes ſont égaux entr'eux, les corps qui ont cette propriété, appartiennent à *la premiere claſſe*. Il y en a une infinité, outre les cinq corps réguliers. On peut former de même *la ſeconde claſſe*, en y comprenant les corps qui ont deux de leurs axes principaux égaux entr'eux, ce qui entraîne l'égalité des moments rapportés à ces axes. Tous les ſolides de révolution ſont dans ce cas, & il y en a une foule d'autres. *La troiſieme claſſe* ſera formée de tous les corps dont les trois axes principaux ſont inégaux, ainſi que les moments d'inertie pris par raport à ces axes. Outre que cette derniere claſſe eſt beaucoup plus nombreuſe que les deux premieres, on eſt obligé de réſoudre une équation fort compliquée du troiſieme degré, pour déterminer les axes principaux des corps qui y ſont compris; enſorte qu'il n'eſt preſque jamais poſſible de détermi-miner leurs mouvements en général.

502. Au reste, on peut considérer les axes principaux par rapport à tout autre point que le centre de gravité ; & alors on aura de nouvelles divisions des corps, semblables aux précédentes. Mais un corps que l'on aura placé dans une certaine classe, eu égard à la nature des axes principaux qui passent par son centre de gravité, pourra bien n'être plus dans la même classe, quand il sera considéré relativement aux axes principaux qui passent par quelqu'autre point. Par exemple, un corps de la premiere classe relativement aux axes principaux du centre de gravité, appartiendra toujours à une classe différente relativement aux axes principaux de tout autre point.

ARTICLE IV.

Du Mouvement d'oscillation d'un corps pesant autour d'un Axe horizontal.

Fig. 190. 503. Soit AMB une coupe verticale du corps, faite par le centre de gravité G perpendiculairement à l'axe de rotation, ensorte que cet axe soit perpendiculaire en C au plan de la figure. Le corps est supposé faire ses oscillations au bout d'une verge inflexible & dénuée d'inertie, CAG.

Si on représente par M la masse du corps, & par g la gravité, on aura Mg pour l'expression de la force accélératrice qui agit en G suivant la verticale GL, & le moment de cette force par rapport à l'axe de rotation sera $Mg \cdot GH$, cette ligne GH étant une perpendiculaire menée sur la verticale CH.

Faisant $CG = f$, & l'angle $GCH = \phi$; on aura $Mgf\sin\phi$ pour exprimer le moment de la force accélératrice. Donc si w est la vîtesse angulaire du corps autour de l'axe de rotation, on aura (481) $dw = \frac{Mf\sin\phi}{\int r^2 dM} g\,dt$, quantité dans laquelle $\int r^2 dM$ est le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.

Désignons par Mh^2 ce moment rapporté à un axe parallele qui passeroit par le centre de gravité; nous aurons $\int r^2 dM = Mh^2 + Mf^2$ (483). Donc $dw = \frac{f\sin\phi}{f^2+h^2} g\,dt$. Mais en supposant que le mouvement se fait dans le sens GH, on a $dt = -\frac{d\phi}{W}$; donc $w\,dw = \frac{-f}{f^2+h^2} g\,d\phi\sin\phi$. L'intégrale est $w^2 = n^2 + \frac{2fg\cos\phi}{f^2+h^2}$; & si on suppose qu'à l'origine du mouvement la ligne CG étoit éloignée de la verticale, d'un angle ϵ, on aura $\phi = \epsilon$, lorsque $w = 0$; donc en général $w^2 = \frac{2fg}{f^2+h^2}(\cos\phi - \cos\epsilon)$.

504. Or un pendule simple qui auroit été écarté de la verticale en même temps que le corps M, & du même angle ϵ, s'il se trouvoit actuellement à la distance ϕ de cette verticale avec la vîtesse angulaire w, & si sa longueur L étoit égale à $\frac{f^2+h^2}{f}$, auroit également pour l'expression du quarré de sa vîtesse angulaire $W^2 = \frac{2fg}{f^2+h^2}(\cos\phi - \cos\epsilon)$. Donc le pendule simple dont la longueur $L = \frac{f^2+h^2}{f}$ se meut précisément comme le corps M; il fera ses oscillations en même temps, & lui sera isochrone.

505. Si on conçoit sur la direction de CG un point pesant O à la distance $CO = L = \frac{f^2+h^2}{f}$, ce point se mouvra

comme s'il étoit libre, c'eſt-à-dire que les autres parties du corps ne troubleront pas ſon mouvement, puiſqu'alors *CO* eſt égale à la longueur du pendule ſimple qui fait ſes vibrations en même temps que le corps.

Donc le corps ſe meut comme ſi toute ſa maſſe étoit concentrée en *O*; car alors le point *O* auroit toujours le même mouvement, & les autres parties ſuivroient ſans réſiſtance le mouvement de ce point, que l'on appelle *le centre d'oſcillation du corps.*

506. Il ſuit délà que lorſqu'un corps eſt obligé de ſe mouvoir autour d'un axe fixe, ſa maſſe n'eſt plus cenſée réunie au centre de gravité, mais au centre d'oſcillation qui ſe meut comme ſi toute la maſſe du corps y étoit concentrée.

Donc auſſi le plus grand effet que puiſſe produire ſur un corps étranger le choc d'un mobile qui tourne autour d'un axe fixe, doit avoir lieu quand le coup eſt donné vers le centre d'oſcillation du choquant, ou du moins à même diſtance de l'axe que ce centre. C'eſt pourquoi le centre d'oſcillation s'appelle auſſi *centre de percuſſion.*

507. Mais pour éclaircir & confirmer en même temps cette vérité, il eſt à propos de démontrer que quand un corps tourne autour d'un axe fixe, la réſultante des forces dont chaque particule eſt animée paſſe par le centre d'oſcillation, ou du moins à même diſtance de l'axe que ce centre.

Fig. 191. Soit *ACP* l'axe de rotation, *G* le centre de gravité,

dM

dM une particule quelconque du corps ſituée en M, du point M menons MQ perpendiculaire ſur le plan GCP & du point Q la perpendiculaire QP ſur CP. Si on déſigne par ϖ la vîteſſe angulaire du corps, on aura $\varpi . PM$ pour l'expreſſion de la vîteſſe de l'élément dM ſuivant Mm perpendiculaire à MP, & $\varpi . PM . dM$ pour l'expreſſion de la force de cet élément. Il en réſultera ſuivant QM la force $\varpi . QP . dM$, & parallélement à QP la force $\varpi . QM . DM$; ces dernieres forces ſe détruiront mutuellement, puiſque $\int QM . dM = 0$. Cependant comme leur réſultante zéro agit à une diſtance infinie, le moment qui en proviendra par rapport à l'axe AP ſera fini, & il aura pour valeur $\varpi . \int QM^2 . dM$.

La réſultante des forces ſuivant QM ſera perpendiculaire au plan AGC, & ſa valeur ſera $\varpi . \int QP^2 dM = \varpi . M . CG$, que nous appellerons R. Son moment par rapport à l'axe ſera $\varpi . \int QP^2 . dM$, & ſa diſtance à cet axe, $\frac{\int QP^2 . dM}{M . CG}$.

Mais au lieu de forces paralleles à QP, qui quoique leur réſultante ſoit nulle, produiſent le moment $W \int QM^2 . dM$, on peut ſubſtituer la force R agiſſant à la diſtance de l'axe, $\frac{W \int QM^2 . dM}{R}$ ou $\frac{\int QM^2 . dM}{M . CG}$. Donc au lieu de toutes les forces dont chaque particule eſt animée on peut ſubſtituer la force R réſultante des forces ſuivant QM, & dont la valeur eſt $\varpi . M . CG$ à la diſtance de l'axe $\frac{\int QP^2 dM}{M . CG} + \frac{\int QM^2 . dM}{M . CG}$, ou $\frac{\int PM^2 . dM}{M . CG}$. Ainſi la force qui réſulte de celles qui animent chaque particule du ſyſtême, paſſe à même diſtance de l'axe que le centre d'oſcillation. C'eſt donc à

cette distance de l'axe que la percussion sur un corps étranger sera la plus forte.

508. D'après ce que l'on vient de voir, il est clair que pour déterminer le mouvement d'oscillation d'un corps quelconque de volume fini, autour d'un axe horizontal, on n'a qu'à bien connoître la distance du centre d'oscillation au point fixe, ou ce qui revient au même, la longueur du pendule simple isochrone.

Or si r exprime la distance d'une particule quelconque dM du corps à l'axe de rotation, & si $\int r^2 dM$ est le moment d'inertie par rapport à cet axe, & f la distance CG du centre de gravité à l'axe, on aura la distance du centre d'oscillation $L = \frac{\int r^2 dM}{M \cdot f}$. Par conséquent *la distance du centre d'oscillation à l'axe est égale au moment d'inertie par rapport à cet axe, divisé par le produit de la masse du corps multipliée par la distance de son centre de gravité au même axe.*

Si Mh^2 exprimoit le moment d'inertie par rapport à l'axe parallele qui passe par le centre de gravité, on auroit $\int r dM = Mh^2 + Mf^2$; donc la distance du centre d'oscillation, $L = \frac{Mh^2 + Mf^2}{Mf} = f + \frac{h^2}{f}$. Donc ce centre est toujours plus éloigné de l'axe que le centre de gravité, de la quantité positive $GO = \frac{h^2}{f}$. Ainsi par ce qui a été dit ci-dessus sur les moments d'inertie, il sera facile de déterminer les centres d'oscillation.

EXEMPLE I.

Fig. 198. 509. Quand on fait des expériences sur les pendules,

on emploie ordinairement un globe *AMB* ſuſpendu à un fil de métal très-mince. Négligeant donc la maſſe de ce fil, & appellant b le rayon du globe, f la diſtance du point de ſuſpenſion au centre du globe, on aura (498) $h^2 = \frac{2}{5} b^2$. Donc la diſtance du centre d'oſcillation à l'axe, ou $CO = f + \frac{2}{5} . \frac{b^2}{f}$, & ſi les oſcillations ſont très-petites, la durée de chacune ſera $\pi \sqrt{\left(\frac{f^2 + \frac{2}{5} b^2}{fg}\right)}$.

Lorſque $f = 0$ & lorſque $f = \infty$, le pendule ſimple iſochrone devient infiniment long; ainſi entre ces deux limites il doit y avoir un *Minimum* pour la diſtance CO; & ce *Minimum* doit avoir lieu lorſque $f = b \sqrt{\frac{2}{5}}$. Alors les oſcillations ſeront les plus promptes qu'il ſoit poſſible, & ſi on les ſuppoſe très-petites, la durée de chacune aura pour expreſſion $\pi \sqrt{\frac{2f}{g}}$.

§ 510. Pour que le pendule batte les ſecondes, il faut en général que $\pi \sqrt{\frac{f^2 + \frac{2}{5} b^2}{fg}} = 1$, ou ce qui eſt la même choſe il faut que $f^2 + \frac{2}{5} b^2 = \frac{fg}{\pi^2}$; donc $f = \frac{g}{2\pi^2} \pm \ldots\ldots \sqrt{\left(\frac{g^2}{4\pi^4} - \frac{2}{5} b^2\right)}$; & par conſéquent il y a toujours deux manieres de ſuſpendre un globe, pour qu'il faſſe une oſcillation par ſeconde.

Si le rayon b du globe eſt petit, il faut que la diſtance du centre du globe au point de ſuſpenſion ſoit exprimée par l'une ou l'autre de ces valeurs, $\frac{g}{\pi^2} - \frac{2}{5} b^2 . \frac{\pi^2}{g}$, & $\frac{2}{5} b^2 . \frac{\pi^2}{g}$. Mais dans ce dernier cas on voit que le point de ſuſpenſion ſeroit en dedans du globe, & même très-près du centre, Auſſi n'emploie-t-on jamais que l'autre valeur $\frac{g}{2\pi^2} + \ldots \sqrt{\left(\frac{g^2}{4\pi^4} - \frac{2}{5} b^2\right)}$.

511. Les deux valeurs de f feroient égales en général; si on avoit $\frac{g^2}{4\pi^4} = \frac{2}{5} b^2$, ou $b = \frac{g}{\pi^2}\sqrt{\frac{5}{8}}$. Donc puisque $\frac{g}{\pi^2}$ représente la longueur du pendule simple à secondes, laquelle est de $440^{l}, 57$ il faudroit que le rayon du globe
Fig. 194. fût de $348^{l}, 3$ ou de $2^{pi}. 5^{pou}. 0^{l}, 3$. Alors l'intervalle CG entre le centre & le point de suspension feroit $\frac{g}{2\pi^2}$, ou la moitié du pendule simple qui bat les secondes, c'est-à-dire $1^{pi}. 6^{pou}. 4^{li}\ \frac{2}{7}$. Si on mene CF perpendiculaire à AG; on verra facilement que l'arc AF a pour cosinus $\frac{CG}{b}$ ou $\sqrt{\frac{2}{5}}$. Cet arc est donc de $50^{\circ}\ 46'$. Or le diametre du globe & le point de suspension C étant ainsi déterminés, les oscillations de ce globe se feront dans une seconde.

Si le globe est supposé osciller autour du point A, on aura $f = b$; donc la longueur du pendule simple isochrone est $\frac{2}{5} b$; & si on veut que ce globe batte les secondes, il faudra prendre son rayon $b = \frac{5}{7} . 440^{l}, 57 = 2^{pi}. 2^{pou}. 2^{l}\ \frac{2}{3}$.

Exemple II.

Fig. 193. 512. Considérons maintenant un pendule composé de deux poids A & B, que nous supposerons sphériques, & attachés à une verge inflexible & sans masse CAB : appellons α & β les rayons de ces globes, a & b les distances de leurs centres au point de suspension C. La distance du centre d'oscillation, ou la longueur du pendule simple isochrone sera

$$CO = \frac{A\left(a^2 + \frac{2}{5}\alpha^2\right) + B\left(b^2 + \frac{2}{5}\beta^2\right)}{Aa + Bb}.$$

Cela posé, on peut demander quelle est la distance a où

il faut placer le petit poids A, pour que les oſcillations ſoient les plus promptes que l'on puiſſe attendre de ce pendule. Mais comme alors le pendule iſochrone CO doit être un *Minimum*, il faut différentier ſa valeur, en faiſant varier a, ce qui donnera

$$A^2(a^2+\tfrac{2}{5}\alpha^2)+AB(b^2+\tfrac{2}{5}\beta^2)=2A^2a^2+2ABab$$

ou $a^2+\frac{2Bb}{A}a=\frac{2}{5}\alpha^2+\frac{B}{A}(b^2+\frac{2}{5}\beta^2)$; d'où on tire

$$a=-\frac{B}{A}b\pm\surd[\tfrac{2}{5}\alpha^2+\tfrac{B}{A}(b^2+\tfrac{2}{5}\beta^2)+\tfrac{B^2}{A^2}b^2],$$

& la longueur du pendule ſimple iſochrone ſe trouvera $=2a$. On voit bien au reſte que de ces deux valeurs de a, il n'y a que la poſitive qui puiſſe ſatisfaire.

Si les deux globes ſont homogenes, on aura $\frac{B}{A}=\frac{\beta^3}{\alpha^3}$, & par conſéquent $a=-\frac{\beta^3}{\alpha^3}b\pm\surd[\frac{2}{5}\alpha^2+\frac{\beta^3}{\alpha^3}(b^2+\frac{2}{5}\beta^2)+\frac{\beta^6}{\alpha^6}b^2]$; & dans le cas où les rayons des globes ſeront très-petits en comparaiſon de CB, on aura à très-peu près la valeur de $a=-\frac{B}{A}b+b\surd(\frac{B}{A}+\frac{B^2}{A^2})$.

513. S'il y avoit trois globes A, B, C dont les rayons fuſſent α, β, γ, & dont les diſtances au point de ſuſpenſion à compter du centre fuſſent a, b, c, alors la diſtance du centre d'oſcillation feroit

$$\frac{A(a^2+\frac{2}{5}\alpha^2)+B(b^2+\frac{2}{5}b^2)+(c^2+\frac{2}{5}\gamma^2)}{Aa+Bb+Cc},$$

& ainſi de ſuite quelque ſoit le nombre de corps.

EXEMPLE III.

514. Un globe AMK ſuſpendu à la verge cylindrique FA étant mobile autour de l'axe horizontal DCF, on dé- Fig. 195.

terminera ſon centre d'oſcillation O, de la maniere ſuivante.

Soit A le poids du globe, B celui du cylindre, a le rayon du globe, $2b$ la longueur FA de la verge de ſuſpenſion, $2a$ ſon diametre, f la diſtance CA, G & O les centres de gravité & d'oſcillation du ſyſtême. Comme le centre de gravité du cylindre eſt en I milieu de FA, on aura d'abord

$$(A+B)CG = A.CB + B.CI = A(f+a) + B(f-b).$$

On aura enſuite pour le moment d'inertie du globe par rapport à l'axe DCE, la quantité $A(f+a)^2 + \frac{2}{5}Aa^2$. Puis on trouvera que le moment d'inertie de la verge par rapport à un axe horizontal qui paſſe par le centre de gravité I eſt $(497) = B(\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{4}c^2)$, & que par rapport à l'axe DCE ce moment eſt $= B[\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{4}c^2 + (f-b)^2]$; donc la diſtance du centre d'oſcillation

$$CO = \frac{A[\frac{2}{5}a^2 + (f+a)^2] + B[\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{4}c^2 + (f-b)^2]}{A(f+a) + B(f-b)}.$$

515. Pour que ce pendule batte les ſecondes, il faudra que $CO = \frac{g}{\pi^2}$, & pour cela il faudra déterminer d'après cette condition l'une des quantités qui ſe trouvent dans ſa valeur, ce que l'on pourra toujours faire par la réſolution d'une équation du ſecond degré.

Quand l'axe de rotation ſe trouve au haut de la verge; on a $f = 2b$, ce qui change la valeur précédente de CO en celle-ci.

$$CO = \frac{A(\frac{7}{5}a^2 + 4ab + 4b^2) + B(\frac{4}{3}b^2 + \frac{1}{4}c^2)}{A(2b+a) + Bb}.$$

Ensorte, par exemple, que si on suppose $A = 15^{lb}$, $B = 2^{onc} = \frac{1}{8}^{lb}$, $CA = 2b = 3^{pi}$, le rayon du globe $a = 3^{pou} = \frac{1}{4}^{pi}$, & le diametre $2c$ de FA assez petit en comparaison de sa longueur, pour qu'on puisse négliger $\frac{1}{4}c^2$, on aura $CO = 3^{pi}, 2528$; & si on négligeoit la masse de la verge FA, on auroit $CO = 3, 2577$; ainsi l'erreur seroit de $0, 0049^{pi}$, ou de $\frac{7}{10}$ de ligne à peu-près.

Exemple IV.

§ 16. Supposons que le pendule dont il faut déterminer le centre d'oscillation soit composé d'une lentille $BGDF$ suspendue à une verge AB de figure parallélepipede, comme cela est ordinairement. (Nous ne représentons ici que la coupe perpendiculaire au plan dans lequel oscille le pendule). Fig. 196.

Soit $2a$ l'épaisseur FG de la lentille, $2b$ sa longueur BD ou le diametre de son grand cercle, $2f$ la longueur de la verge AB, m sa largeur ih, n son épaisseur, c la distance CB, L le poids de la lentille, P celui de la verge.

Cela posé, le centre de gravité du pendule étant dans un point G, & celui de la verge dans un point I, on aura d'abord

$$(L+P)GC = L.EC + P.CI = L(b+c) + P(c-f).$$

On aura ensuite (499) pour le moment d'inertie de la lentille par rapport à l'axe FG, la quantité

$$\frac{1}{20}L.\frac{7a^4+15a^2b^2+10b^4}{a^2+3b^2},$$

& par rapport à l'axe horizontal TCV, ce moment ſera

$$\frac{1}{20} L \cdot \frac{7a^4 + 15a^2 b^2 + 10 b^4}{a^2 + 3 b^2} + L (b + c)^2.$$

Quant au moment de la verge AB rapporté à un axe horizontal qui paſſeroit par le centre de gravité I, on aura (500) pour ſon expreſſion $\frac{1}{12} P (4f^2 + n^2)$, & en le rapportant à l'axe TCV, on trouvera $\frac{1}{12} P (4f^2 + n^2) + P (c - f)^2$. Donc la diſtance CO du centre d'oſcillation, ou la longueur du pendule ſimple iſochrone ſera

$$\frac{\frac{1}{10} L (7a^4 + 15a^2b^2 + 10b^4) : (a^2 + 3b^2) + L (b + c)^2 + \frac{1}{12} P (4f^2 + n^2) + P (c - f)^2}{L (b + c) + P (c - f)}$$

quantité qu'il faudra égaler à $\frac{g}{\pi^2}$, ſi on veut que le pendule batte les ſecondes.

REMARQUE.

517. Huyghens fut le premier qui rechercha avec ſuccès, & qui détermina par une méthode directe les centres d'oſcillation des plans & des ſolides (*Horol. Oſcil. Part.* 4. *Prop.* XXI & XXII). On ſait à quel point ce grand homme poſſédoit le talent de ramener aux choſes utiles les théories les plus élevées, & combien toutes les parties des Mathématiques lui ſont redevables. Les Arts ne lui doivent pas moins, celui de l'Horlogerie ſur-tout. Après avoir fait en ce genre des découvertes immortelles, il eut l'idée de les appliquer à la recherche d'une meſure invariable, & bientôt il déduiſit de la longueur du pendule iſochrone, l'exiſtence de cette meſure. Voici quel fut ſon raiſonnement.

Si

Si une pendule à feconde eft une fois bien réglée fur le temps moyen par des obfervations d'étoiles (ou par telle autre obfervation propre à cela), rien n'eft plus aifé que de fe procurer un pendule fimple qui faffe fes ofcillations en même temps. Il fuffit d'alonger ou d'accourcir le fil auquel il eft fufpendu, de maniere à faire coïncider bien exactement pendant un quart d'heure ou une demi-heure tout au plus les ofcillations des deux pendules. Quand on eft parvenu à cette précifion, il n'y a plus qu'à mefurer avec foin la diftance du point de fufpenfion au centre d'ofcillation dans le pendule fimple; car alors cette diftance étant partagée en trois parties égales, chacune de ces parties pourra tenir lieu de mefure invariable & univerfelle. (Huyghens l'appelle *le Pied Horaire*).

On voit bien en effet que tant que la force de la gravité fera la même dans un même lieu, jamais la longueur du pendule fimple ne variera. Les fiécles à venir pourront donc vérifier & retrouver les mefures actuelles, en les comparant à cette longueur, au cas que par le laps du temps elles s'altérent ou fe perdent. Il fuffira, par exemple, que la poftérité fache que le pendule à fecondes étoit à Paris de 3 pieds 8 lignes $\frac{57}{100}$, pour en conclure que le rapport du pied de Roi au pied horaire eft celui de 432 à 440,57. Si les anciens peuples avoient ainfi fixé leurs mefures, on ne difputeroit pas tant fur la longueur de celles des Hébreux, des Egyptiens, des Grecs & des Romains.

Article V.

Du double mouvement que peut prendre un corps libre frappé suivant une direction qui ne passe pas par son centre de gravité.

Fig. 197. 518. Soit M un corps quelconque ; soit G son centre de gravité ; on demande quel sera le mouvement de ce corps si une puissance quelconque A le sollicite suivant une direction AF qui ne passe point par son centre de gravité ?

On a déja vu que le centre doit se mouvoir comme si la force motrice lui étoit immédiatement appliquée suivant une direction parallele GE ; il prendra donc suivant cette ligne la vîtesse $\frac{A}{M}$. On a vu aussi que pendant le mouvement progressif du centre de gravité, les autres parties devoient, en vertu de la puissance motrice, tourner autour de ce centre comme s'il étoit fixe. Supposons donc que le mouvement de rotation se fait autour d'un axe perpendiculaire en G au plan de la figure, & appellons ϖ la vîtesse angulaire que prendra le corps autour de cet axe, f la perpendiculaire GF, Af le moment de la puissance motrice par rapport à l'axe de rotation, MK^2 le moment d'inertie par rapport au même axe ; on aura $\varpi = \frac{Af}{MK^2}$, pour l'expression de la vîtesse de rotation initiale. Mais cette vîtesse & l'axe de rotation seront-ils les mêmes dans les instants suivants ?

519. Pour résoudre ce problême, il faut chercher en général quels sont dans un corps quelconque les axes

autour desquels ce corps mis une fois en mouvement, doit continuer de se mouvoir uniformément autour du même axe.

Soit AP l'axe cherché, G le centre de gravité du corps, MQ une perpendiculaire sur le plan GAP, menée du point M où se trouve l'élément dM du corps soient GA, QP des perpendiculaires menées des points G & Q sur l'axe AP. Nommons AP, x; PQ, y; QM, z; la vîtesse angulaire du corps autour de l'axe AP, w; & on aura $w . PM$ pour l'expression de la vîtesse de rotation de l'élément dM. La force centrifuge de ce même élément suivant PM sera exprimée (407) par $\frac{W^2 . PM^2}{PM} dM = w^2 . PM . dM$. Fig. 198.

Cette force se décompose en deux, l'une suivant $QM = w^2 . z dM$, l'autre parallélement à $PQ = w^2 . y dM$. La résultante de toutes les forces $w^2 . z dM$ doit être zéro; puisque $\int z dM = 0$. La résultante des forces $w^2 . y dM$ sera $w^2 . M . GA$. Mais il faut que l'axe AP soit tel que les forces centrifuges se fassent mutuellement équilibre, & qu'elles ne puissent rien changer ni à la vîtesse angulaire, ni à l'axe même. Il faut donc que la résultante $W^2 . M . GA$ soit zéro, & par conséquent que l'axe de rotation passe par le centre de gravité.

520. Il faut encore quelque autre chose; car les forces $w^2 \int z d M$, $w^2 \int y dM$ quoique agissant à des distances infinies $\frac{\int x z dM}{\int z dM}$, $\frac{\int x y dM}{\int y dM}$ produiroient des moments finis... $w^2 \int x z dM$, $w^2 \int x y dM$ capables de faire varier l'axe de

rotation & la vîtesse angulaire. Il faut donc de plus que l'on ait $\int xy\, dM = 0$, $\int xz\, dM = 0$, pour que l'effet des forces centrifuges soit détruit. Or les formules $\int xy\, dM = 0$, $\int xz\, dM = 0$ n'ont lieu que lorsque AP est un des axes principaux. On peut donc conclure généralement que *dans un corps libre quelconque, les axes principaux sont les seuls autour desquels un mouvement de rotation primitivement imprimé se perpétue uniformément.*

Et par conséquent la solution du problême suppose que l'axe perpendiculaire en G au plan de la figure est un des axes principaux.

REMARQUE.

FIG. 199. § 521. Dans un mouvement tel que celui dont il s'agit ici, le centre de gravité G étant mû uniformément suivant la ligne GE, & les autres parties tournant en même temps autour du point G dans le sens KL, il doit nécessairement y avoir sur la droite FGK perpendiculaire à GE un point C dont la vîtesse de rotation perpendiculaire à CG soit égale à la vîtesse du centre de gravité, & qui reste par conséquent en repos pendant un instant. Ce point est ce que M. Bernoulli appelle *le Centre spontané de rotation.*

Pour déterminer ce point, remontons aux formules déja trouvées; $\frac{A}{M}$ exprime la vîtesse du centre de gravité commune à toutes les particules, $\frac{Af}{MK^2}$ est l'expression de la vîtesse angulaire du corps, ainsi $\frac{Af}{MK^2} \cdot CG$ représente la vîtesse de rotation du point C. On aura donc $\frac{Af}{MK^2} \cdot CG = \frac{A}{M}$, &

par conséquent $CG = \frac{K^2}{f}$. D'où il suit que *le centre spontané de rotation n'est autre chose que le centre d'oscillation du corps tournant autour de l'axe perpendiculaire en* F *au plan de la figure.* Il se déterminera donc par les mêmes principes.

PROBLÊME I.

§ 22. Un corps m étant mû suivant la droite IK avec la vîtesse V rencontre le corps M perpendiculairement à la surface de celui-ci, mais suivant une direction qui ne passe pas par son centre de gravité G : on demande quel sera après le choc le mouvement de ces deux corps, M étant supposé libre & en repos. FIG. 200.

Soit v la vîtesse du corps m après le choc, ensorte que $m(V-v)$ exprime la quantité de mouvement qu'il communique au corps M suivant IK. On sait que le centre de gravité G doit se mouvoir comme si cette force lui étoit immédiatement appliquée suivant une direction parallele GE ; il aura donc suivant GE la vîtesse $\frac{m(V-v)}{M}$.

On sait d'ailleurs que les autres parties du corps tourneront autour de G avec la vîtesse angulaire $w = \frac{m(V-v)f}{MK^2}$, en appellant f la perpendiculaire GK sur IK, & en désignant par MK^2 le moment d'inertie par rapport à l'axe perpendiculaire en G au plan de la figure, axe autour duquel le corps est censé tourner.

Il faut maintenant que la vîtesse du point de contact I du corps M, estimée suivant IK soit égale à la vîtesse v qui reste au corps m, afin que ces deux vîtesses ne se

nuiſent pas mutuellement. Or en vertu du mouvement de rotation autour de G, la vîteſſe du point I perpendiculairement à GI eſt $\frac{m(V-v)f}{MK^2} \cdot GI$; d'où réſulte ſuivant IK la vîteſſe $\frac{m(V-v)f^2}{MK^2}$ & cette vîteſſe ajoutée à la vîteſſe progreſſive du centre de gravité, $\frac{m(V-v)}{M}$, doit être égale à v. Ainſi on aura l'équation

$$\frac{m(V-v)f^2}{MK^2} + \frac{m(V-v)}{M} = v \text{ qui donne } v = \frac{V(mf^2 + mK^2)}{MK^2 + mK^2 + mf^2}.$$

Donc la vîteſſe du centre de gravité ſuivant GE, $= \frac{m(V-v)}{M}$ $= \frac{VmK^2}{MK^2 + mK^2 + mf^2}$, & la vîteſſe de rotation autour de l'axe G eſt $w = \frac{Vmf}{MK^2 + mK^2 + mf^2}$; ce qui réſout le problême propoſé.

Si la diſtance f étoit zéro, on auroit $v = \frac{MV}{M+m}$, celle du centre de gravité ſeroit $\frac{mV}{M+m} = v$, & la vîteſſe de rotation $w = 0$. En effet le choc étant alors direct, on détermineroit le mouvement par les loix déja connues.

PROBLÊME II.

Fig. 201. 523. Deux corps durs & ſphériques A, a ſuſpendus aux points fixes C, c par les verges inflexibles CA, ca, ſe rencontrent avec des vîteſſes angulaires V, v; quel ſera leur mouvement après le choc?

Soient V', v' les vîteſſes angulaires qu'ils auront après le choc; il faudra par le principe général que les vîteſſes V' & v' ne ſe nuiſent pas mutuellement, & que les corps A, a animés des vîteſſes angulaires $V - V'$, $v - v'$ ſe faſſent

équilibre. Menons $CB = F$, $cb = f$ perpendiculairement ſur la ligne Aa qui paſſe par les centres & par le point de contact. La premiere condition exige que les vîteſſes des points B, b ſoient égales ; on aura donc l'équation $V'F = v'f$.

En ſecond lieu chaque particule dM du corps A ſituée à la diſtance r de l'axe C étant animée de la vîteſſe $(V - V')r$ qu'elle a perdue, il en réſulte par rapport à cet axe, le moment $(V - V')r^2 dM$; donc la ſomme des moments eſt $(V - V')\int r^2 dM$ ou $(V - V')AK^2$, en appellant AK^2 le moment d'inertie du corps A par rapport à l'axe C.

Le corps A animé de la vîteſſe angulaire $V - V'$ équivaut donc à une force $\frac{(V - V')AK^2}{F}$, qui agiroit en B dans la direction de AB : pareillement le corps a animé de la vîteſſe angulaire $v - v'$ équivaut à une force $\frac{(v - v')ak^2}{f}$ qui agiroit en b dans la direction de AB. Il faut donc par la ſeconde condition que $\frac{(V - V')AK^2}{F} + \frac{(v - v')ak^2}{f} = 0$.

Or cette équation jointe à celle que l'on a déja trouvée, $V'F = v'f$, fera connoître les vîteſſes angulaires V', v', dont les valeurs ſont

$$V' = \frac{f(AK^2Vf + ak^2vF)}{AK^2f^2 + ak^2F^2} \ldots v' = \frac{F(AK^2Vf + ak^2vF)}{AK^2f^2 + ak^2F^2}.$$

524. Nous avons ſuppoſé les corps durs ; mais s'ils étoient parfaitement élaſtiques, les formules du mouvement auroient beſoin des modifications que l'élaſticité exige. Car alors cette force reſtituant en ſens contraire au corps A la vîteſſe $V - V'$ qu'il auroit perdue par la com-

preſſion, il ne lui reſteroit plus que la vîteſſe $2V' - V$.

De même le corps a ayant gagné dans la compreſſion la vîteſſe $v' - v$, il en gagneroit autant par ſon élaſticité, enſorte qu'après le choc ſa vîteſſe ſeroit $2v' - v$. Subſtituant donc à V' & à v' les valeurs que l'on vient de trouver, on auroit pour la vîteſſe angulaire du corps A la quantité

$$\frac{AK^2Vf^2 + 2ak^2vFf - ak^2VF^2}{AK^2f^2 + ak^2F^2},$$

& pour la vîteſſe angulaire du corps a, la quantité

$$\frac{ak^2vF^2 + 2AK^2VFf - AK^2vf^2}{AK^2f^2 + ak^2F^2}.$$

Avant le choc une particule dM du corps A ſituée à la diſtance r de l'axe de rotation avoit la viteſſe rV & la force vive r^2V^2dM; donc la force vive du corps A étoit $V^2\int r^2 dM$ ou $V^2 . AK^2$, & la ſomme des forces vives des deux corps A, a étoit $V^2 . AK^2 + v^2 . ak^2$. Cette ſomme eſt devenue par le choc $AK^2(2V' - V)^2 + ak^2 . (2v' - v)^2$, ou $V^2 . AK^2 + v^2 . ak^2 + 4AK^2V'(V' - V) + 4ak^2v'(v' - v)$. Or il eſt aiſé de voir que les deux derniers termes ſe réduiſent à zéro; car les deux équations $V'F = v'f \ldots \frac{AK^2(V' - V)}{F} + \frac{ak^2(v' - v)}{f} = 0$ donnent $V'(V' - V)AK^2 + v'(v' - v)ak^2 = 0$. Donc la ſomme des forces vives eſt la même avant & après le choc, quand les deux corps ſont parfaitement élaſtiques.

❦

TABLE
DES CHAPITRES.

INTRODUCTION.

LA STATIQUE.

SECTION I.

SECTION II.

LA DYNAMIQUE.

SECTION I.

SECTION II.

SECTION III.

Fin de la Table.

APPROBATION.

J'AI lû par ordre de Monseigneur le Chancelier un Ouvrage qui a pour titre: *Traité de Méchanique* par M. L'ABBÉ MARIE, Professeur de Mathématiques, & il m'a paru que cette production écrite avec soin, & composée avec sagesse, étoit bien digne de l'attention & de l'estime publiques. A Paris le 22 Avril 1774.

L'Abbé DE LA CHAPELLE.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre, à nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenants Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra: SALUT. Notre amée la veuve DESAINT, Libraire, Nous a fait exposer qu'elle desireroit faire imprimer & donner au Public, *un Traité de Méchanique, par M. l'Abbé* MARIE, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposante, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par-tout notre Royaume, pendant le temps de six années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes. Faisons défenses à tous Imprimeurs, Libraires & autres personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit Ouvrage, ni d'en faire aucun Extrait, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit de ladite Exposante, ou de ceux qui auront droit d'elle; à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des Contrevenants, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers à ladite Exposante, ou à celui qui aura droit d'elle, & de tous dépens, dommages & intérêts: A la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression dudit Ouvrage sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en beau papier & beaux caracteres, conformément aux Réglements de la Librairie, & notamment à celui du dix Avril mil sept cent vingt-cinq, à peine de déchéance du présent Privilege; qu'avant de l'exposer en vente, le manuscrit qui aura servi de copie à l'impression dudit Ouvrage, sera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier, Garde des Sceaux de France, le sieur DE MAUPEOU; qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle dudit sieur DE MAUPEOU; le tout à peine de nullité des

Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ladite Exposante & ses ayant cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, soit tenue pour duement signifiée; & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers Secretaires, foi soit ajoutée comme à l'original: Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires. CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris, le ving-quatrieme jour du mois de Mars l'an de grace mil sept cent soixante-treize, & de notre regne le cinquante-huitieme. Par le Roi en son Conseil.

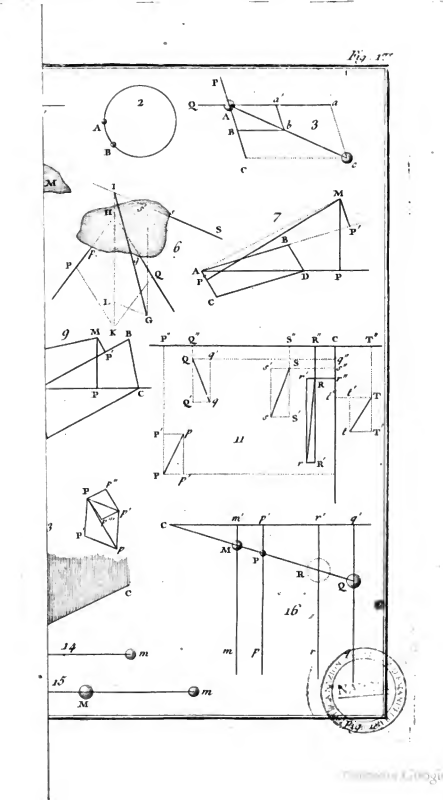
Signé, LE BEGUE.

Registré sur le Registre XIX. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, numéro 2536. folio 72. conformément au Réglement de 1723. A Paris ce 6 Avril 1773.

C. A. JOMBERT pere, Syndic.

Imprimé pour la premiere fois en Mai 1774.

De l'Imprimerie de L. F. DELATOUR. 1774.


Fig. 1.re
2
A
B
3
Q
P
A
a'
a
b
B
C
c
M
I
H
S
6
P
F
Q
L
G
K
7
M
B
P'
A
F
D
P
C
9
M
K
B
P'
P
C
P"
Q"
S"
R"
C
T"
Q
q'
S
q"
s"
r"
R
Q'
q
s'
S'
t'
T
t
T'
P'
p
11
P
p'
r
R'
P
p"
p'
p"'
P'
p
C
m'
p'
r'
q'
M
P
R
Q
16
c
14
m
15
M
m
m
p
r
q
Fig. 16

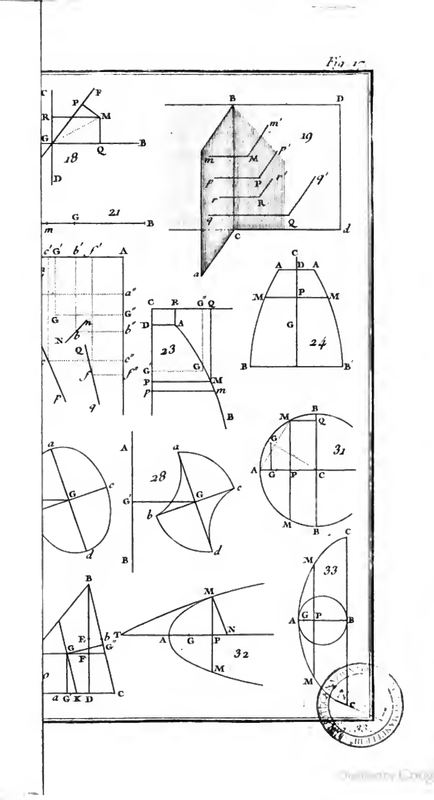


Fig. 17
18
19
21
23
24
28
31
32
33

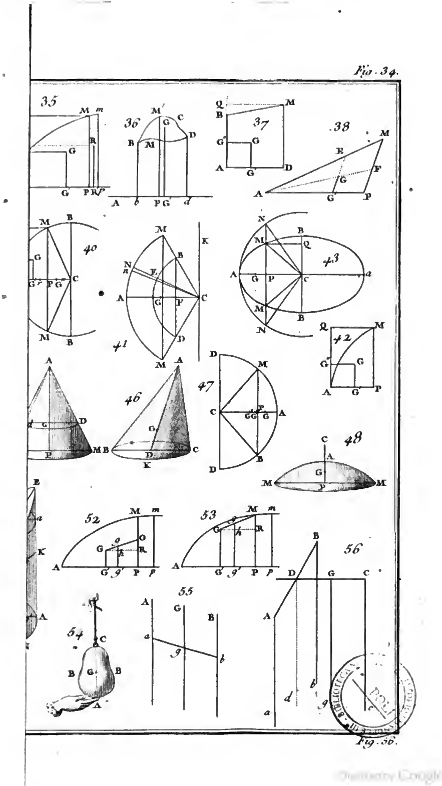
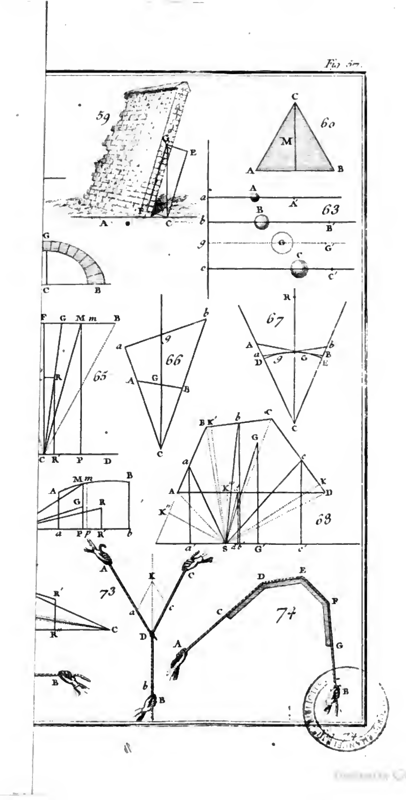
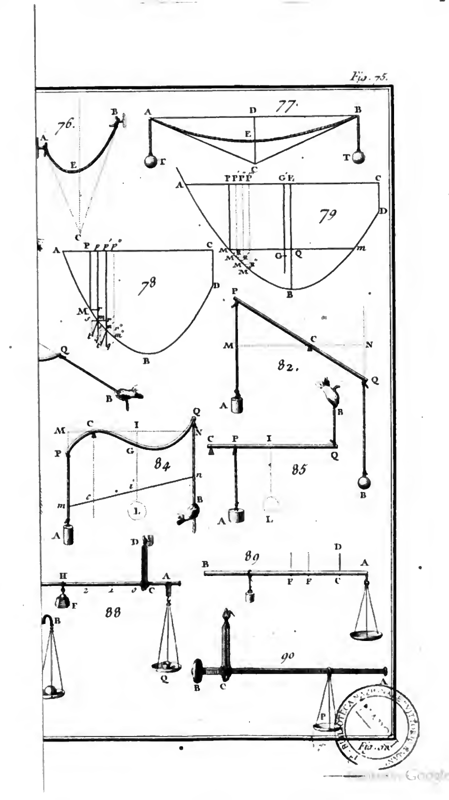
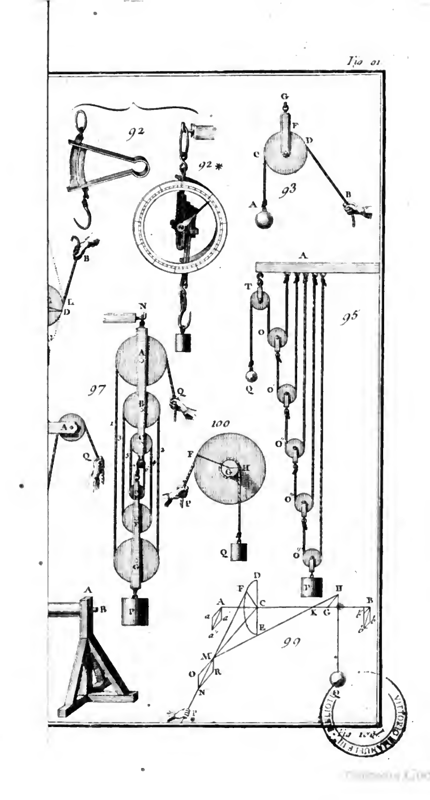


Fig. 34.
35
36
37
.38
40
41
43
42
46
47
48
52
53
54
55
56
Fig. 56.

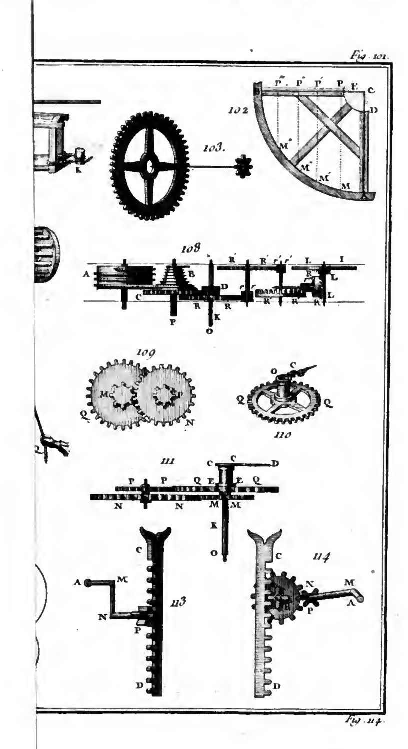


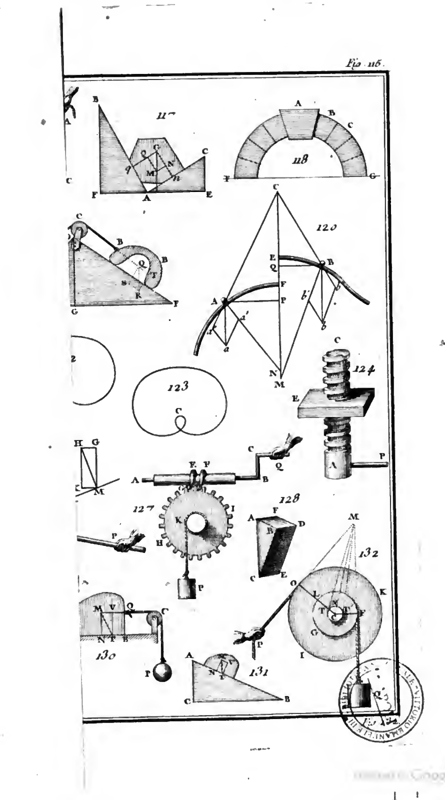

59
60
63
65
66
67
68
73
74


Fig. 75.
76.
77.
78
79
82.
84
85
88
89
90



92
92 *
93
95
97
100
99


Fig. 101.
102
103.
108
109
110
111
113
114
Fig. 114.


Fig. 116.
117
118
120
123
124
127
128
130
131
132
Fig. 122

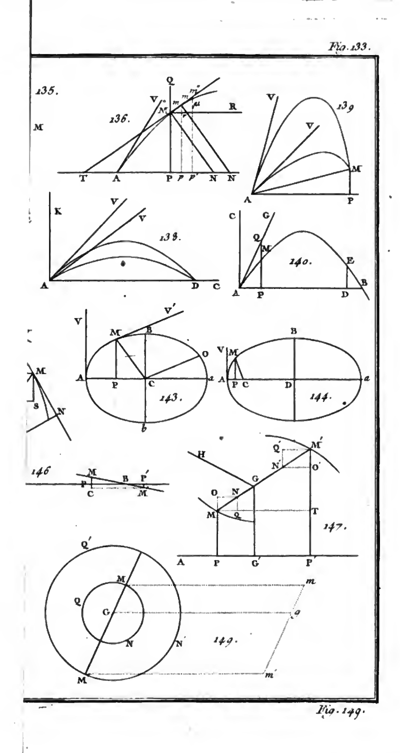

Fig. 133.
135.
136.
139
138.
140.
143.
144.
146
147.
149.
Fig. 149.

Fig. 150.

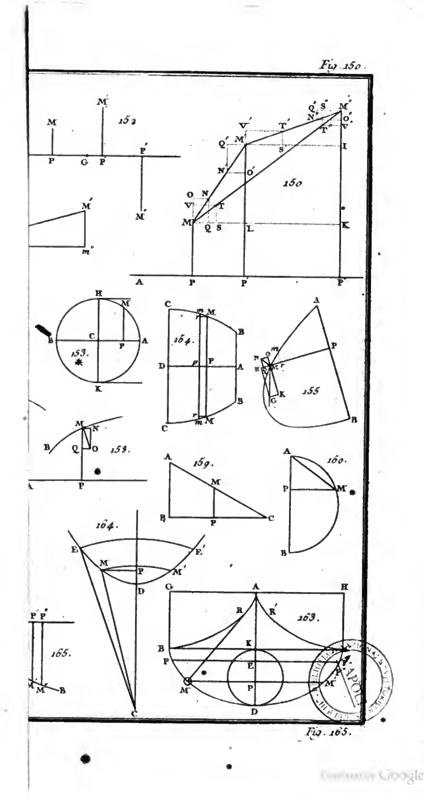


Fig. 165.

Fig. 166.

167.

168.

171.

172.

173.

176.

177.

180.

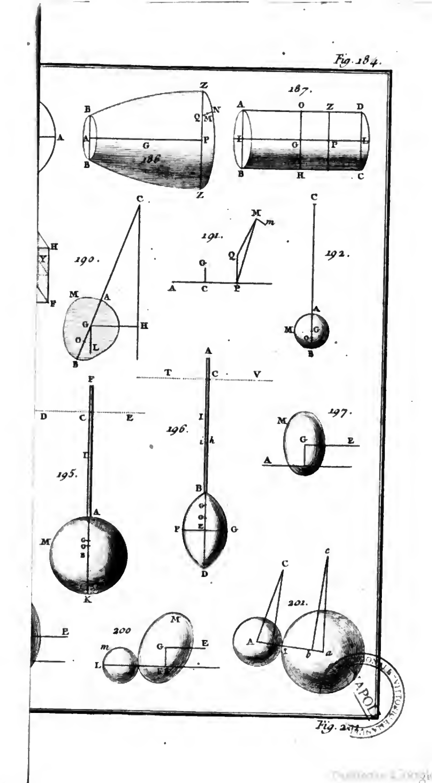
181.

182.

183.

Fig. 183.




Fig. 184.
187.
186
191.
190.
192.
196.
197.
195.
200
201.
Fig. 201.

20th





